



Propagation des ultrasons en milieux poreux anisotropes : Application à l'os trabéculaire

Fabien Mézière

► To cite this version:

Fabien Mézière. Propagation des ultrasons en milieux poreux anisotropes : Application à l'os trabéculaire. Rhumatologie et système ostéo-articulaire. Université Paris.Diderot (Paris 7), 2014. Français. NNT : . tel-01128763

HAL Id: tel-01128763

<https://hal.science/tel-01128763>

Submitted on 10 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution| 4.0 International License

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Fabien MÉZIÈRE

École Doctorale 564 *Physique en Île de France*

Spécialité : Matière condensée et interfaces

Laboratoire : Institut Langevin



**PROPAGATION DES ULTRASONS EN
MILIEUX POREUX ANISOTROPES :
APPLICATION À L'OS TRABÉCULAIRE**

Thèse encadrée par

M. Arnaud DERODE	Professeur de l'Université Paris 7	Directeur de thèse
Mme Marie MULLER	Assistant Professor, NC State University	Co-directrice de thèse
M. Emmanuel BOSSY	Maître de conférence ESPCI ParisTech	Co-encadrant

Présentée devant le jury composé de

M. Patrick RASOLOFOSAON	Ingénieur de recherche IFP Énergies nouvelles	Rapporteur
M. Pascal LAUGIER	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
M. Arnaud DERODE	Professeur de l'Université Paris 7	Directeur de thèse
Mme Francine LUPPÉ	Professeur de l'Université du Havre	Examinatrice
M. Jean-Pierre VILOTTE	Physicien à l'Institut de Physique du Globe de Paris	Examineur

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	5
Introduction	7
1. Propagation d'ondes en milieux poreux	11
1.1. Introduction	11
1.2. Formule de Wood	12
1.2.1. Exemple de propagation en milieu poreux	12
1.2.2. Limite de la formule de Wood	14
1.3. Théorie de Biot	17
1.3.1. Contraintes, déformations et tenseur élastique	17
1.3.2. Propagation d'une onde plane élastique	19
1.3.3. Expression des coefficients élastiques et de la masse volumique apparente	21
1.3.4. Cas particuliers	23
1.3.5. Viscosité, atténuation et hypothèse haute fréquence	25
1.4. Théories de milieux poreux appliquées à l'os	25
1.4.1. Théorie de Schoenberg et os trabéculaire	25
1.4.2. Théorie de Biot et os trabéculaire	26
1.5. Conclusion	28
2. Propagation d'ondes en milieux multiples diffusants	29
2.1. Quelques définitions importantes	29
2.1.1. Onde cohérente	29
2.1.2. Longueurs caractéristiques d'atténuation	30
2.2. Expériences sur les mousses solides Sawbones	31
2.2.1. Les échantillons	31
2.2.2. Expériences en transmission	31
2.2.3. Expériences en rétrodiffusion	37
2.3. Conclusions sur les échantillons	41
2.4. L'Independent Scattering Approximation	43
2.5. Conclusion	44
3. Diffusion par un cylindre à section elliptique de grand rapport d'aspect	47
3.1. Techniques de calcul du champ diffusé	48
3.1.1. Champ diffusé par un cylindre à section circulaire	48
3.1.2. Champ diffusé par un cylindre à section elliptique	48
3.2. Approche modale en coordonnées polaires	50
3.2.1. Principe	50
3.2.2. Exemple introductif	52
3.2.3. Conditionnement des matrices & fonctions de Bessel	53
3.2.4. Première tentative d'amélioration : préconditionnement des matrices	55

3.3. Étude de diffuseurs elliptiques rigides	57
3.3.1. Principe	57
3.3.2. Calcul en précision arbitraire	57
3.3.3. Ellipse longue rigide	58
3.3.4. Influence du rapport d'aspect de l'ellipse	60
3.3.5. Influence de la taille de l'ellipse	61
3.4. Retour au diffuseur élastique	62
3.5. Quelle technique utiliser ? Discussion selon le type de diffuseur	64
3.5.1. Diffuseur circulaire	64
3.5.2. Diffuseurs rigides ou fluides	64
3.5.3. Diffuseur élastique de forme quelconque	65
3.6. Conclusion	66
4. Étude de modèles poreux anisotropes numériques	69
4.1. Le modèle	70
4.1.1. Mise en place du modèle	70
4.1.2. Les paramètres	70
4.2. Étude qualitative	71
4.2.1. Fraction solide	73
4.2.2. Anisotropie	74
4.2.3. Connectivité des diffuseurs	76
4.2.4. Percolation	77
4.2.5. Propriétés mécaniques des phases	78
4.2.6. Composition des ondes rapide et lente	81
4.2.7. Bords solides	84
4.2.8. Premières conclusions de l'étude qualitative	85
4.3. Étude quantitative	86
4.3.1. Détermination des vitesses et coefficients d'atténuation	86
4.3.2. Cas de la propagation d'une seule onde : propagation perpendiculaire à la direction privilégiée	88
4.3.3. Cas de la propagation de deux ondes : propagation dans la direction privilégiée	90
4.3.4. Conclusions sur l'étude quantitative des milieux modèles	93
4.4. Conclusion sur ces travaux numériques	94
4.5. Perspectives	94
5. Retour à l'os trabéculaire	97
5.1. Échantillon d'os de cheval	97
5.1.1. Expérience en transmission	98
5.1.2. Expérience en rétrodiffusion	100
5.1.3. Simulations	100
5.2. Réalisation d'échantillons modèles par impression 3D	102
5.2.1. Technologies et défis liés à la structure de l'os trabéculaire	104
5.2.2. Premières tentatives	105
5.2.3. Collaboration avec l'Institut Curie	106
5.2.4. Dispositif expérimental ultrasonore	108
5.2.5. Étude des propriétés des différents matériaux	108
5.2.6. Premières structures : des forêts de barres	111
5.2.7. Duplication d'un échantillon d'os de cheval	113
5.3. Conclusion	114

Conclusion	117
A. Guide des simulations	119
A.1. Paramètres généraux	119
A.1.1. Brève présentation de SimSonic	119
A.1.2. Paramètres mécaniques	119
A.1.3. Signal d'émission	120
A.2. Simulations 3D (§1.2.1, §2.2.2, chapitre 4 & §5.1.3)	121
A.3. Simulations 2D (chapitre 4)	122
A.4. Calcul du champ diffusé par un objet (§4.3 & chapitre 3)	122
A.4.1. Principe	122
A.4.2. Champ diffusé par les ellipses (2D, chapitre 3)	123
A.4.3. Champ diffusé vers l'avant par les ellipsoïdes (3D, §4.3)	126
B. Ondes élastiques dans les solides	127
B.1. Contraintes, déformations et tenseur élastique	127
B.2. Propagation d'une onde élastique	128
B.3. Cas d'un solide isotrope	129
B.4. Cas d'un solide isotrope transverse	130
B.4.1. Propagation selon la direction principale	130
B.4.2. Propagation perpendiculaire à la direction principale	131
C. Diffusion par un cylindre elliptique : annexes de calcul (§3.2.1)	133
C.1. Quelques développements	133
C.1.1. Composantes du vecteur déplacement dans le diffuseur	133
C.1.2. Coefficients du tenseur des contraintes dans le diffuseur	133
C.1.3. Composantes de la normale à la frontière du diffuseur	134
C.2. Coefficients de la matrice A et du second membre B	134
C.2.1. Formalisme mathématique	134
C.2.2. Mise en place numérique	135
D. Publications et communications	137
D.1. Publications dans des journaux internationaux à comité de lecture	137
D.2. Conférences internationales en tant qu'orateur	137
D.3. Conférences internationales en tant que co-auteur	137
D.4. Conférences nationales en tant qu'orateur	138
Bibliographie	139

REMERCIEMENTS

Après ces trois ans et quelques mois vient naturellement le moment des remerciements. Si le doctorat n'est décerné qu'à une seule personne, la thèse n'en reste pas moins un travail d'équipe. Avant d'en venir à ceux qui m'ont permis de mener à bien ce projet, je souhaite déjà vivement remercier le Fonds AXA pour la Recherche pour avoir financé mes travaux. Je mesure la chance que j'ai eu de pouvoir travailler dans d'excellentes conditions matérielles et avec une grande liberté.

Naturellement, je tiens à remercier chaleureusement Marie Muller, Emmanuel Bossy et Arnaud Derode, qui ont encadré cette thèse. En premier lieu pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet, mais aussi pour m'avoir accompagné tout au long de ces trois années. J'ai eu la chance de bénéficier de leur grande pédagogie, et de pouvoir travailler avec une grande autonomie tout en étant guidé et aidé quand il le fallait. Je tiens à souligner la qualité de leur démarche scientifique, dont j'ai pu m'imprégner et qui me sera très utile pour la suite, mais aussi et surtout le plaisir que c'était de travailler avec eux. Les réunions et autres échanges électroniques, ponctués d'humour, jeux de mots ou double sens ont contribué à un climat de travail vraiment agréable.

Je voudrais bien sûr remercier MM. Pascal Laugier et Patrick Rasolofosaon d'avoir rapporté ce travail de thèse, et du temps qu'ils y ont consacré malgré des emplois du temps chargés. Merci également à Mme Francine Luppé et M. Jean-Pierre Vilotte pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je suis ravi d'avoir pu présenter mon travail à des chercheurs aussi expérimentés dans des domaines scientifiques très variés.

Les résultats que je présente dans ce manuscrit sont également le fruit de collaborations. Je tiens donc ici à saluer ceux sans qui la rédaction aurait certes été plus courte, mais surtout beaucoup moins riche. Ainsi merci à Renaud Boistel pour l'initiation au sympathique marathon du Synchrotron et pour son service de micro-tomographie à la demande. Merci à Marc Gesnik, qui, en tant que premier stagiaire et ayant fait les expériences sur l'os de cheval, restera à jamais mon poulain. Le calcul du champ diffusé par des ellipses serait resté à l'état de problème non résolu sans Didier Cassereau. Je tiens donc à le remercier vivement pour tout le temps qu'il a passé avec moi à comprendre ce problème et les moyens colossaux de calcul qu'il a mis en place. Enfin, s'il y a un projet où les collaborations ont été capitales, c'est l'impression 3D. Le résultat final est le fruit d'un long chemin ponctué de divers interlocuteurs. Je tiens donc à remercier tous ceux qui m'ont aidé, notamment Cécile Bidan du Max-Planck-Institut de Potsdam, Vincent Semetey de l'Institut Curie ou encore Joël Rivault de la société 3D Solutions qui nous a permis de rentrer en contact avec nos futurs sauveurs. Les sauveurs en question, qui n'étaient en fait situés qu'à 1 km du laboratoire, sont Laurent Malaquin, Petra Juskova et Jason Woittequand de l'Institut Curie. Je ne les remercierai jamais assez d'avoir fait passer le projet d'impression d'un stade quasi-nul à très prometteur en l'espace du stage de Jason. Un merci particulier à Jason pour sa grande autonomie et pour avoir assuré la passerelle entre les deux laboratoires. Je garde de très bons souvenirs de toutes ces collaborations, autant humainement que scientifiquement.

J'ai également profité tout au long de mon séjour à l'Institut Langevin d'une ambiance formidable. Je voudrais remercier pour cela l'ensemble des membres du laboratoire, permanents, aides, gestionnaires, post-doctorants et doctorants qui y ont contribué. Un merci plus spécifique à Romain Pierrat et Jérôme Laurent que j'ai mis à contribution à de nombreuses reprises, l'un pour des questions informatiques, l'autre pour des transducteurs et autres matériels. Merci aussi à Nicolas, Laurent, Sébastien, Sylvain et Olivier avec qui j'ai pu taper la balle jaune (m'évitant ainsi de taper

sur mon ordinateur de frustration à certains moments). Enfin bien sûr, sans les nommer par peur d'oubli, un grand merci à tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon bureau, que ce soit dans les locaux du 10 rue Vauquelin jusqu'à ceux du 1 rue Jussieu, le fameux bureau R31 et son légendaire ficus, en incluant ceux qui y squattaient une bonne partie du temps.

Pour terminer, même si les deux s'entremêlent parfois, il y a une vie à côté de la thèse. Merci donc à ma famille, parents, frère et sœur, qui m'ont supporté (dans tous les sens du terme) de ma plus tendre enfance jusqu'à maintenant. Merci aussi aux amis PCéens avec qui j'ai déjà passé de nombreux bons moments pendant les quatre années d'école, puis les trois ans de la thèse, et il n'y a pas de raison que ça s'arrête. Et bien sûr un immense merci à Blandine, qui réalise l'exploit de pouvoir rentrer dans toutes les catégories précédentes ou presque. L'anecdote veut que tu aies lancé ce sujet qui deviendra ma thèse, mais je te remercie surtout pour tout le reste.

INTRODUCTION

L'ostéoporose, maladie affectant la structure osseuse, fait partie des grands enjeux liés au vieillissement croissant de la population mondiale. D'après la Société Française de Rhumatologie, l'incidence de la maladie passe en effet de 39% chez les femmes de 65 ans à 70% chez les octogénaires ¹. Les hommes, bien que moins touchés, n'en sont pas pour autant épargnés. Cette maladie se manifeste par une détérioration de l'os, qui le rend très fragile et augmente considérablement les risques de fracture. Ainsi un autre chiffre particulièrement frappant fait état d'une fracture toutes les trois secondes dans le monde due à l'ostéoporose ². Les sites osseux les plus touchés sont, dans l'ordre, les vertèbres (tassement), le col du fémur et le poignet. Ces fractures ont un coût important pour la société et, principalement dans le cas de la fracture du col du fémur, un risque non négligeable de mortalité. Il y a donc un réel intérêt à pouvoir prévenir l'apparition de l'ostéoporose et des fractures qu'elle engendre.

De nombreux facteurs sont reconnus ou suspectés d'influencer l'apparition de la maladie. Des taux de calcium et de vitamine D suffisamment élevés sont notamment particulièrement importants pour retarder l'ostéoporose. Par ailleurs, des traitements médicamenteux existent pour retarder la maladie ou diminuer les risques de fracture lorsqu'elle est déclarée. Cela suppose néanmoins de pouvoir diagnostiquer cette maladie de façon suffisamment précoce pour que le traitement soit le plus efficace possible. Actuellement, l'examen de référence est la mesure de la Densité Minérale Osseuse (DMO), appelée ostéodensitométrie. Cette mesure se fait par absorptiométrie biphotonique à rayons X (DXA). Comme son nom l'indique, le principe est de déduire la densité minérale osseuse à partir de l'atténuation de rayons X à deux fréquences différentes. Cependant, si cette technique a le mérite d'exister, elle souffre de plusieurs inconvénients :

- Tout d'abord, comme toute méthode radiographique elle est ionisante, ce qui peut poser des problèmes d'accumulation de doses dans le cas de campagnes de dépistage rapprochées à partir d'un certain âge.
- D'autre part, la densité mesurée est une valeur moyenne, intégrée sur toute la partie osseuse traversée par les rayons X. Or, nous y reviendrons par la suite, l'os présente deux types de structure de nature très différente comme illustré figure 0.1. L'une, relativement dense, est appelée os cortical. L'autre, l'os trabéculaire, est en revanche très poreuse, entre 80% et 90% en moyenne. La DXA n'est pas capable de distinguer os cortical et os trabéculaire et la valeur de densité minérale mesurée est donc une valeur intermédiaire qui ne reflète vraiment ni l'une ni l'autre des structures.
- Enfin, et surtout, la mesure de la DMO ne permet pas à elle seule de prédire de façon précise les risques de fracture. D'autres paramètres interviennent, comme la micro-structure [1].

L'émergence de techniques complémentaires (voire de remplacement) est donc essentielle pour introduire de nouveaux paramètres cliniques plus révélateurs de la santé de la structure osseuse.

Les techniques ultrasonores figurent parmi les alternatives crédibles. Tout d'abord, elles sont non ionisantes et moins chères que les techniques à rayons X. Mais surtout, en tant qu'ondes mécaniques, les ultrasons ont l'avantage d'être justement sensibles aux propriétés mécaniques de la

1. http://www.rhumatologie.asso.fr/04-Rhumatismes/grandes-maladies/0A-dossier-osteoporose/A1_chiffres.asp

2. <http://share.iofbonehealth.org/WOD/2012/report/FR/WOD12-report-FR.pdf>

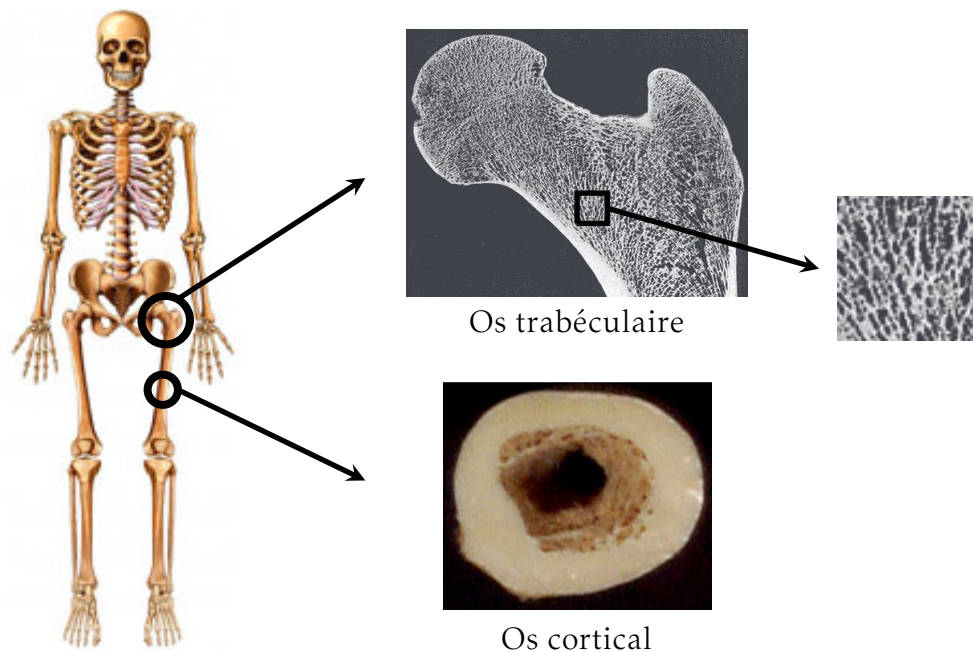


FIGURE 0.1. – Les deux types de structure osseuse : os cortical et os trabéculaire.

structure dans laquelle ils se propagent, et notamment à la micro-structure [2]. Cela pourrait permettre de découvrir de meilleurs paramètres cliniques. De nombreux travaux ont été menés en ce sens à la fois sur l'os cortical et l'os trabéculaire depuis les années 1980. Ces deux structures étant très différentes (Fig. 0.1), les mesures ultrasonores ciblant les deux types d'os sont naturellement elles aussi différentes, et donc complémentaires. L'os cortical, constituant l'enveloppe externe de tous les os et la partie tubulaire centrale (appelée diaphyse) des os longs, est un site de mesure relativement accessible. Cependant, comme il s'agit d'une structure très dense, l'impact de l'ostéoporose y est dans un premier temps plus faible, rendant le dépistage précoce plus difficile. À l'inverse, l'os trabéculaire est beaucoup plus sensible à l'ostéoporose. C'est en effet dans les sites osseux majoritairement constitués d'os trabéculaire (vertèbres, fémur) qu'ont lieu le plus de fractures. Des mesures sur l'os trabéculaire pourraient donc permettre un diagnostic plus précoce. Revers de la médaille, cette structure est aussi plus difficile d'accès et surtout beaucoup plus complexe, comme nous le verrons par la suite. Les mesures sont donc plus difficiles à mettre en place, et à interpréter³.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons exclusivement à l'os trabéculaire. À l'heure actuelle, la compréhension limitée de la propagation ultrasonore dans cette structure reste un frein majeur à des mesures cliniques performantes. L'os trabéculaire est en effet complexe : poreux, anisotrope, hétérogène, aléatoire, ... Cela se manifeste d'un point de vue ultrasonore par des phénomènes mal compris, comme l'observation ou non de deux ondes longitudinales, ou encore la variation linéaire du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence. Quelle est l'influence de l'anisotropie ? Des propriétés de chacune des phases ? De la variabilité des échantillons ? De la diffusion ? Quels paramètres pourraient permettre de décrire cette structure si complexe ? Toutes ces questions restent en suspens. Le but ici n'est donc pas de trouver la solution complète et parfaite de l'interaction entre os trabéculaire et ultrasons, mais d'apporter quelques éclairages novateurs, à travers un certain nombre d'approches complémentaires. La notion essentielle qui guide l'ensemble de cette thèse est la **modélisation** de l'os trabéculaire.

3. Les chiffres, enjeux, techniques de mesure liés à l'ostéoporose sont ici résumés de façon très succincte. La référence [3] donne des informations beaucoup plus exhaustives à ce sujet.

L'os trabéculaire en tant que milieu poreux. Nombre de travaux existent dans la littérature sur la propagation d'ondes élastiques dans les milieux poreux. Le dénominateur commun de ces travaux est l'**homogénéisation** du milieu, notion que nous aurons l'occasion d'éclaircir par la suite. La théorie phare de cette approche est la théorie de Biot. Cette façon d'appréhender l'os a connu des succès (observation des deux ondes longitudinales), mais également des échecs (inaptitude à rendre compte de l'atténuation), dont il s'agira de comprendre les raisons pour pouvoir l'appliquer à bon escient.

L'os trabéculaire en tant que milieu multiplement diffusant. Les théories de diffusion multiple se prêtent particulièrement bien à la propagation d'ondes en milieux hétérogènes et aléatoires. Vitesse et atténuation de l'**onde cohérente** transmise (moyenne du champ transmis), ou encore **pic de rétrodiffusion cohérente** (*via* la moyenne de l'intensité réfléchie), permettent de caractériser ce genre de milieux. En théorie, l'approche diffusion multiple permet de poser des équations exactes. Néanmoins il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices pour pouvoir obtenir des solutions exploitables et définir une vitesse et une atténuation effectives. Ainsi l'Independent Scattering Approximation (ISA), souvent employée pour prédire vitesse et atténuation dans un milieu multiplement diffusant, est-elle applicable au cas de l'os trabéculaire ?

L'os trabéculaire en tant que nuage d'ellipsoïdes. La compréhension des phénomènes étant particulièrement difficiles dans une structure osseuse réelle, il peut être intéressant de revenir à un modèle plus simple. Un modèle d'ellipsoïdes distribués aléatoirement dans un fluide peut rendre compte du caractère biphasique, aléatoire et anisotrope de l'os trabéculaire. Est-ce suffisant pour décrire le comportement ultrasonore de l'os ? Quelles informations peut-on en tirer pour mieux comprendre la propagation dans l'os ? En particulier il peut être intéressant de mettre ce type de milieu parfaitement contrôlé à l'épreuve des théories de milieux poreux et de diffusion multiple. En effet la coexistence de ces deux théories aux hypothèses *a priori* opposées est au cœur du sujet : peuvent-elles se rejoindre ?

L'os trabéculaire en tant que structure imprimée en 3D. Enfin d'un point de vue purement expérimental, quelles sont les solutions pour étudier la propagation dans des milieux modèles d'os ? Est-ce que les techniques d'impression 3D, en pleine expansion, pourraient permettre d'obtenir des échantillons de structure parfaitement contrôlables ?

Ces quatre points constituent la clef de voûte de ce qui va être développé au cours de cette thèse. Nous serons amenés à passer de l'un à l'autre, de la théorie aux résultats expérimentaux ou numériques. Le présent manuscrit est décomposé en cinq chapitres. Le premier a pour objet les théories d'ondes en milieux poreux. Ce sera l'occasion de présenter en détail ces théories, et principalement la théorie de Biot, tout en gardant pour objectif une potentielle application à l'os trabéculaire. Le deuxième chapitre traite des théories de diffusion multiple. À travers des résultats expérimentaux nous tâcherons d'appréhender le formalisme de ces théories, ainsi que les outils qu'elles proposent, comme l'Independent Scattering Approximation. Le chapitre 3 traite de la résolution numérique de la diffusion par des cylindres elliptiques. Cette problématique, bien que dans la lignée du chapitre sur la diffusion multiple, constitue un sujet indépendant du reste de la thèse. Le quatrième chapitre concerne un modèle numérique simple aux propriétés similaires à l'os trabéculaire, mis en place pour tenter de répondre à la multitude de questions en suspens concernant la propagation des ultrasons dans l'os poreux. Enfin, le dernier chapitre renoue avec l'os trabéculaire à proprement parler, à travers des expériences sur des échantillons réels d'os de cheval, mais également des simulations et la réalisation de structures identiques à l'os par impression 3D.

PROPAGATION D'ONDES EN MILIEUX POREUX

1.1. Introduction

L'intérêt pour la propagation des ondes élastiques dans les milieux poreux a déjà presque un siècle. C'est d'abord dans le domaine de la géologie qu'il se manifeste, avec l'étude des roches poreuses à des fins de prospections pétrolières mais aussi de compréhension des phénomènes sismiques. D'autres champs d'application vont par la suite s'ouvrir, et notamment l'étude de l'os à partir des années 1980 [4]. À l'heure actuelle, les théories d'ondes en milieux poreux constituent encore la voie la plus empruntée pour tenter de décrire la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire.

La vocation de ce chapitre est de se familiariser avec les théories de propagation d'ondes en milieux poreux. Quels sont les avantages des différentes théories ? Sous quelles hypothèses peut-on les utiliser ? Sont-elles compatibles avec l'étude de l'os trabéculaire ? Ces questions méritent d'être posées, car les caractéristiques de l'os poreux ne sont pas les mêmes que celles des roches poreuses pour lesquelles les théories ont été à l'origine développées. La seule hypothèse d'**homogénéisation**, sur laquelle reposent toutes ces théories, est discutable dans le cas de l'os trabéculaire. Derrière ce terme se cache l'idée, finalement assez intuitive, que les propriétés d'un mélange de deux phases se ramènent à un mélange des propriétés de ces phases.

Prenons un exemple très simple : les couleurs. Pigments jaunes et bleus ont des spectres d'absorption de la lumière différents, à l'origine de leur couleur. Comme chacun sait, le mélange des deux couleurs apparaît vert, ce qui peut se déduire de la superposition des deux spectres initiaux. En termes techniques, le mélange peut être vu comme un milieu homogénéisé, dont les propriétés absorbantes se déduisent de celles de chacune des phases (les pigments) qui le constituent. Pour faire varier la teinte de vert, il suffit de modifier les proportions de jaune et de bleu dans le mélange. De manière générale, **la proportion relative de chacune des phases** est un paramètre essentiel et commun à toutes les théories d'homogénéisation.

Ce chapitre s'articule en trois points. Pour se familiariser avec les techniques d'homogénéisation des milieux poreux, nous verrons tout d'abord l'approche la plus simple, celle de Wood. Nous aborderons ensuite la théorie de Biot, théorie phare de la propagation d'ondes en milieux poreux. La troisième et dernière partie sera l'occasion de faire le point sur les succès et les échecs des théories d'ondes en milieux poreux appliquées à l'os trabéculaire disponibles dans la littérature.

1.2. Formule de Wood

1.2.1. Exemple de propagation en milieu poreux

Un milieu poreux est par définition constitué de deux phases, l'une solide, l'autre fluide. Usuellement, il est caractérisé par sa porosité, c'est-à-dire sa proportion volumique de fluide. Néanmoins, dans le domaine de l'os trabéculaire, il est au contraire plus fréquent d'utiliser la fraction volumique de solide, notée en anglais BVTV (Bone Volume / Total Volume). C'est ce choix de convention qui a été fait ici. La fraction solide ϕ_s sera préférée à la porosité, afin de replacer plus facilement les résultats dans le contexte des travaux relatifs à la propagation ultrasonore dans l'os trabéculaire.

Dans le but de nous familiariser avec les milieux poreux, observons dans un premier temps la propagation d'une impulsion ultrasonore dans les trois milieux suivants :

- (a) Un milieu composé exclusivement de fluide (eau)
- (b) Un milieu composé exclusivement de solide (os)
- (c) Un milieu composé en proportions égales de fluide et de solide, répartis aléatoirement

Cette propagation sera simulée, comme dans tout le reste de la thèse, à l'aide du logiciel SimSonic, décrit dans l'annexe A. Dans cette annexe sont répertoriées toutes les informations essentielles pour comprendre les résultats présentés au cours de cette thèse. Y sont ainsi décrites les propriétés mécaniques (§A.1.2) ou encore le signal d'émission, onde plane de fréquence centrale 1 MHz (§A.1.3), utilisés dans toutes les simulations. Les caractéristiques particulières à chaque simulation sont ensuite expliquées : dimensions du milieu, conditions de bord, position de la source et des récepteurs, ... Concernant les simulations qui nous intéressent ici, elles sont disponibles dans la partie (§A.2). L'information capitale est que de nombreux récepteurs sont répartis uniformément à l'intérieur du milieu, ce qui permet d'observer la propagation en fonction du temps et de la distance. Il en résulte non pas de simples signaux temporels, mais des diagrammes bidimensionnels ("Bscans"), comme on peut le constater sur la figure 1.1.

Les trois diagrammes de cette figure montrent des fronts d'onde de pentes différentes. Or la pente des fronts d'onde correspond à la vitesse de propagation dans chacun des trois milieux. La détermination de ces pentes donne les vitesses suivantes :

- (a) $c_0 = 1,5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ dans le fluide
- (b) $c_L = 4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ dans le solide
- (c) $c_{\text{eff}}^{\text{sim}} = 1,7 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ dans le poreux

La vitesse dans les milieux (a) et (b) est simplement celle fixée par les paramètres mécaniques simulés pour chacune de ces phases (§A.1). C'est la propagation dans le troisième milieu (figure 1.1(c)) qui est la plus intéressante. Un premier résultat remarquable est que le milieu se comporte apparemment comme un milieu homogène (un seul front d'onde bien net) avec une faible atténuation. La vitesse de propagation dans ce milieu (en vert) est comprise entre celle dans le fluide (en bleu) et celle dans le solide (en rouge). Mais elle est bien plus proche de la vitesse dans le fluide. La vitesse dans le milieu n'est donc pas simplement la moyenne des vitesses dans chaque phase. Pour autant, est-il possible de prédire la vitesse de propagation dans ce milieu, à partir des données connues (fraction solide $\phi_s = 0.5$, masses volumiques (ρ_f et ρ_s) et modules de compression (K_f et K_s) du fluide et du solide)?

Il faut pour cela revenir à la relation entre vitesse du son, module de compression et masse volumique. Pour les milieux fluide et solide, cela s'écrit

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_f}{\rho_f}} \quad , \quad c_L = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_s}} \quad (1.2.1)$$

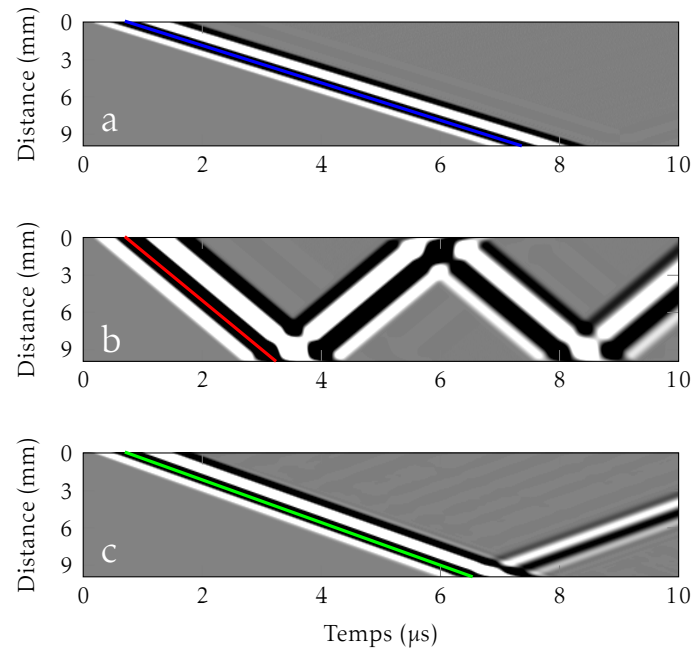


FIGURE 1.1. – Propagation d’une onde plane impulsionnelle (fréquence centrale 1 MHz) dans trois milieux différents. Pour chaque milieu 100 récepteurs sont répartis uniformément le long de l’échantillon, permettant d’obtenir des diagrammes distance-temps. (a) Milieu composé exclusivement de fluide. La pente de la droite bleue donne une vitesse $c_0 = 1,5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. (b) Milieu composé exclusivement de solide. La pente de la droite rouge donne une vitesse $c_L = 4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. (c) Milieu composé en proportions égales de fluide et de solide, répartis aléatoirement. La pente de la droite verte donne une vitesse de $c_{\text{eff}}^{\text{sim}} = 1,7 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, comprise entre les vitesses c_0 et c_L .

L'idée est d'écrire une relation similaire pour la vitesse $c_{\text{eff}}^{\text{th}}$ dans le milieu poreux, avec une masse volumique ρ_{eff} et un module de compression K_{eff} homogénéisés (aussi appelés effectifs). De façon assez intuitive, la masse volumique effective peut s'écrire

$$\rho_{\text{eff}} = \phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \rho_f \quad (1.2.2)$$

Avec une telle formule, ρ_{eff} est bien par définition la masse volumique du milieu poreux (rapport entre sa masse et son volume). Une formule similaire permet d'obtenir le module effectif K_{eff} , avec cependant une petite subtilité puisqu'il faut avoir cette fois recours aux inverses des modules (appelés aussi complaisances) :

$$\frac{1}{K_{\text{eff}}} = \phi_s \frac{1}{K_s} + (1 - \phi_s) \frac{1}{K_f} \quad (1.2.3)$$

Pourquoi l'inverse ? Une analogie avec des ressorts permet de le comprendre. Du point de vue de l'onde qui se propage, le milieu poreux est similaire à une succession de ressorts en série, de raideurs K_f ou K_s selon le milieu traversé. Or, lorsque deux ressorts sont en série, les inverses des raideurs se somment pour obtenir l'inverse de la raideur équivalente¹.

En utilisant les masse volumique et module effectifs ainsi obtenus, la vitesse théorique dans le milieu homogénéisé s'écrit

$$c_{\text{eff}}^{\text{th}} = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\phi_s \frac{1}{K_s} + (1 - \phi_s) \frac{1}{K_f}\right) (\phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \rho_f)}} \quad (1.2.4)$$

Il s'agit de la **formule de Wood [5]**, introduite dès les années 1930. Pour le milieu poreux aléatoire de la figure 1.1(c), dont les masses volumiques et modules sont donnés en annexe A.1, cela donne

$$c_{\text{eff}}^{\text{th}} = 1,7 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1} = c_{\text{eff}}^{\text{sim}} \quad (1.2.5)$$

Dans cet exemple, la valeur prédite par la formule de Wood correspond donc bien à la vitesse observée à l'aide de la simulation².

1.2.2. Limite de la formule de Wood

En premier lieu, la formule de Wood suppose *a priori* que le milieu est isotrope, ne serait-ce que pour pouvoir définir un module de compression. Elle n'est donc pas adaptée à l'os trabéculaire, qui lui est anisotrope. On pourrait cependant imaginer une généralisation à des milieux anisotropes, en faisant par exemple intervenir un tenseur élastique au lieu d'un simple module de compression.

Reprenons l'exemple du mélange des couleurs. Un mélange de jaune et de bleu apparaît vert. Oui, mais à l'œil nu. À une échelle beaucoup plus petite (en utilisant un microscope par exemple) il est possible de distinguer les pigments jaunes des pigments bleus. Le milieu n'apparaît alors ni vert ni même homogène. Autrement dit, l'hypothèse d'homogénéisation ne tient plus. Cet exemple simpliste illustre parfaitement la limite majeure de l'hypothèse d'homogénéisation : **elle n'est valable qu'à une certaine échelle.**

Quel est donc le domaine de validité de la formule de Wood ? Comme dans tout ce qui a trait à la propagation d'ondes, le paramètre essentiel est la longueur d'onde. Le milieu peut être homogénéisé si la longueur d'onde est grande devant les dimensions caractéristiques d'au moins l'une

1. Pour deux ressorts en série, c'est le ressort de plus faible raideur qui prédomine dans la raideur équivalente. Ce sera l'inverse pour des ressorts en parallèle.

2. À noter que cette formule n'est pas bornée au cas des milieux poreux fluide/solide, et peut tout aussi bien être utilisée dans des mélanges fluide/fluide par exemple [6].

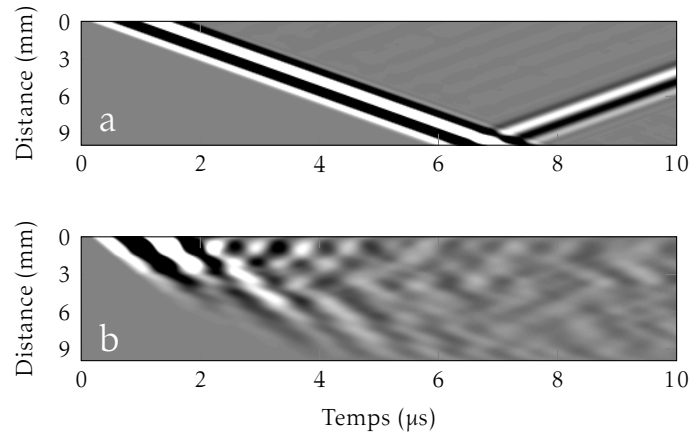


FIGURE 1.2. – Propagation d’une impulsion ultrasonore (fréquence centrale 1 MHz) dans deux milieux poreux aléatoires. (a) Même figure que 1.1(c). Taille caractéristique de chaque phase : $10\mu\text{m}$ (taille du voxel). (b) Taille caractéristique de chaque phase : $1,5\text{mm}$ (longueur d’onde dans le fluide).

des deux phases. Autrement dit, **l’homogénéisation est une hypothèse basse fréquence**. Tant que cette condition sera remplie, la vitesse effective dans le milieu pourra être déduite de la formule de Wood. Une expression similaire pourrait également être envisagée pour rendre compte de l’atténuation. Ici les deux phases étant un fluide parfait et un solide élastique non atténuant, l’atténuation effective du milieu homogénéisé serait forcément nulle. C’est ce que l’on observe effectivement sur la figure 1.1(c) : l’onde ne subit vraisemblablement pas d’atténuation significative.

Que se passe-t-il maintenant lorsque l’hypothèse n’est plus valable ? La figure 1.2 montre la propagation dans deux milieux poreux aléatoires de même fraction solide (50%). Seule la taille caractéristique des phases varie entre les deux milieux. Pour le premier, figure 1.2(a) (identique à la figure 1.1(c)), elle est de l’ordre de la taille du pixel ($10\mu\text{m}$), soit bien en deçà de la longueur d’onde dans le fluide $\lambda_f = 1,5\text{mm}$. Dans ce cas, effectivement, la formule de Wood rend bien compte de la vitesse observée. Pour le deuxième, la taille caractéristique est cette fois de l’ordre de λ_f^3 . Il s’agit donc d’un cas à la limite de validité de l’hypothèse basse fréquence. Et la figure 1.2(b) montre que la propagation est totalement différente.

Première observation : il n’y a plus de front d’onde aussi net. Difficile alors d’attribuer une vitesse ultrasonore à ce milieu, qui n’apparaît plus homogène. D’autre part, l’atténuation est cette fois bien visible. Les propriétés mécaniques de chacune des phases n’ont pourtant pas changé, donc le milieu n’est toujours pas absorbant. L’atténuation est ici due au phénomène de **diffusion**, qui conduit à une répartition de l’énergie dans toutes les directions, et plus seulement vers l’avant. On distingue notamment de nombreuses réflexions qui peuvent expliquer la forte atténuation de l’onde. Le phénomène de diffusion devient significatif lorsque les dimensions caractéristiques de l’hétérogénéité sont de l’ordre de la longueur d’onde, ce qui est le cas ici. Et c’est justement la limite de validité des théories d’homogénéisation. Voilà pourquoi les théories de diffusion et d’homogénéisation sont souvent opposées. Nous aurons l’occasion d’étudier plus en détail les théories de diffusion lors du chapitre 2.

Enfin, toujours en raison de l’hypothèse basse fréquence, la formule de Wood ne tient pas compte de la dispersion qui peut apparaître dans le milieu poreux. Tous les paramètres sont en effet des paramètres statiques. Et elle ne prend pas non plus en compte la micro-architecture (c’est-à-dire l’arrangement entre les parties fluides et solides). Or la structure est pourtant susceptible d’influencer la propagation des ultrasons [2]. C’est assurément le cas dans l’os puisqu’une

3. Le milieu est obtenu en fixant la même valeur (fluide ou solide) à des blocs de 150^3 voxels.

propagation parallèle ou perpendiculaire à la direction des travées donnera des résultats totalement différents [7].

Potentiel clinique de la théorie de Wood

Replaçons nous maintenant dans le contexte d'une évaluation ultrasonore de la structure de l'os trabéculaire. Quel intérêt peut avoir la formule de Wood ? Si tant est qu'elle soit applicable (ce qui, nous le verrons par la suite, reste à discuter étant donné les dimensions caractéristiques et les fréquences utilisées en clinique), elle a l'avantage de relier de façon simple la vitesse à seulement 5 paramètres : K_f , K_s , ρ_f , ρ_s et ϕ_s . La variabilité entre individus des paramètres K_f et ρ_f , qui concernent la moelle, peut être considérée suffisamment faible pour supposer ces paramètres constants et connus. D'ailleurs, la sensibilité des vitesses et coefficients d'atténuation vis-à-vis des propriétés du fluide est relativement faible puisque remplacer la moelle par de l'eau n'a que peu d'incidence [8]. Il ne reste donc plus que 3 paramètres inconnus.

Si l'on fait également l'hypothèse d'une faible variabilité des coefficients de la phase solide K_s et ρ_s , il ne reste alors plus qu'une seule inconnue : la fraction solide ϕ_s , notée usuellement BV/TV pour l'os. Il serait donc possible d'avoir accès de façon simple à un paramètre particulièrement important pour caractériser l'os et sa compétence mécanique. Néanmoins, l'hypothèse de faible variabilité est plus critiquable dans le cas de la phase solide.

Or, une seule mesure ultrasonore ne permet pas de déduire 3 paramètres inconnus. En regardant de plus près l'équation 1.2.3, comme ϕ_s est faible dans le cas de l'os trabéculaire (de l'ordre de 0.1 à 0.2) et $K_s \gg K_f$ (plus de 10 fois plus grand), le module effectif est sensiblement identique à celui de la phase fluide. La vitesse peut donc être approchée par la formule

$$c_{\text{eff}}^{\text{approx}} \approx \sqrt{\frac{K_f}{\rho_{\text{eff}}}} \approx \sqrt{\frac{K_f}{(\phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \rho_f)}} \quad (1.2.6)$$

Autrement dit, la mesure de la vitesse donnerait accès la densité moyenne ρ_{eff} , c'est-à-dire à un paramètre sensiblement proche de la densité minérale osseuse (DMO) obtenue actuellement par l'absorption biphotonique à rayons X.

Si la formule de Wood rendait compte à elle seule de la propagation dans l'os trabéculaire, il n'y aurait alors guère d'espoir d'obtenir d'autres paramètres cliniques que ceux donnés par la méthode à rayons X. Ce n'est heureusement pas le cas, puisqu'elle ne permet par exemple pas d'expliquer les deux ondes longitudinales observées dans le cas de la propagation dans le sens des travées osseuses [9]. C'est ce qui explique l'intérêt porté à ce phénomène des deux ondes, susceptible de fournir de nouvelles informations plus pertinentes sur la structure osseuse. En revanche, lorsque la propagation est perpendiculaire aux travées, une seule onde est observée [7]. La formule de Wood pourrait donc convenir à cette situation. Les paramètres seraient certes similaires à ceux obtenus par rayons X, mais mesurés avec une technique non invasive, non ionisante et peu chère relativement aux techniques à rayons X.

La formule de Wood, pourtant simple, pourrait donc selon moi avoir un intérêt clinique qui n'est, à ma connaissance, pas exploité à l'heure actuelle. Des tests seraient bien entendu nécessaires pour valider cette possibilité. Il s'agirait d'abord de vérifier la validité des diverses hypothèses avancées (homogénéisation basse fréquence, variabilité inter individus des différents paramètres, approximation du module effectif par le module de compression du fluide). Viendrait ensuite la prise en compte de l'influence des épaisseurs de peau et d'os cortical traversées, contraintes inévitables pour toutes mesures sur l'os trabéculaire *in vivo*. Enfin se poserait également la question du site de mesure, qui devrait permettre une propagation perpendiculaire aux travées, pour n'observer qu'une seule onde.

1.3. Théorie de Biot

La formule de Wood, qui prédit la propagation d'une seule onde longitudinale, est insuffisante pour décrire pleinement la propagation ultrasonore dans l'os trabéculaire. Comme discuté précédemment, la non prise en compte de la micro-structure du milieu poreux est vraisemblablement une des causes de cet échec. Mais à cela s'ajoute également l'absence de prise en compte du caractère élastique de la phase solide (module de cisaillement non nul), ainsi que les potentiels mouvements relatifs entre les deux phases. Ces aspects sont justement pris en compte par la **théorie de Biot** [10, 11].

Cette théorie, arrivée quelques années après la formule de Wood, vise à l'origine à comprendre la propagation dans les roches poreuses saturées d'eau. Le but original est donc éloigné de l'os, mais elle est suffisamment générale pour pouvoir s'appliquer à une large gamme de milieux poreux. Il s'agit assurément de la plus connue des théories de propagation en milieux poreux, et cela pour une raison majeure : **elle prédit la propagation de deux ondes polarisées longitudinalement dans un milieu poreux**. C'est d'autant plus marquant que la confirmation expérimentale de cette prévision théorique viendra plus de 30 ans plus tard [12].

Ce résultat a, à lui seul, justifié tout l'intérêt porté à cette théorie pour décrire la propagation dans l'os, depuis que les ondes lente et rapide y ont également été observées [4, 9]. Pour autant, est-ce que l'utilisation de la théorie de Biot est bien justifiée dans le cas de l'os trabéculaire ? Pour tenter de répondre à cette question, nous allons voir ici les grandes lignes de la théorie de Biot conduisant à la prédiction des deux ondes longitudinales. Cela s'appuie principalement sur les références [10] et [13], qui pourront être consultées pour plus de précision. Enfin, pour une vision vraiment complète des milieux poreux anisotropes, il convient de consulter le livre référence de Carcione [14].

1.3.1. Contraintes, déformations et tenseur élastique

Pour comprendre la théorie de Biot, il faut comprendre son cheminement mathématique. La présence de nombreux paramètres et la lourdeur de certaines étapes mathématiques peut rendre la théorie assez abstraite. Aussi nous tâcherons ici de réduire autant que possible la part mathématique, pour privilégier au maximum la physique derrière la théorie. En fait, la démarche est sensiblement la même que pour l'étude de la propagation d'ondes dans les solides, qui est rappelée en annexe B. L'objectif dans les deux cas est d'aboutir à l'équation d'onde vérifiée par le champ de déplacement, à partir des relations liant contraintes et déformations dans le milieu. C'est là la subtilité pour le milieu poreux, puisqu'il est constitué de deux phases. Il n'y a donc pas *un* champ de déplacement, mais *des* champs de déplacement de composantes (u_1, u_2, u_3) et (U_1, U_2, U_3) . Ces champs sont respectivement ceux des phases solide et fluide *homogénéisées*. Ainsi la théorie de Biot est, tout comme la formule de Wood, une théorie basse fréquence, comme le dit Biot lui-même [11].

Au champ de déplacement dans le solide est associé le tenseur des déformations dont les éléments seront notés e_{kl} . Au champ de déplacement dans le fluide est associée la dilatation ε du fluide. Nous avons alors

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (1.3.1)$$

De même nous définirons le tenseur des contraintes dans le solide d'éléments σ_{ij} , et la contrainte dans le fluide σ^4 . Les tenseurs des déformations et des contraintes d'un solide étant symétriques, ils sont chacun composés de seulement 6 coefficients indépendants.

4. $\sigma = -(1-\phi_s)p$, avec p la pression dans le fluide, le signe '-' étant dû à une différence de convention entre contrainte et pression.

Sur le même modèle que la loi de Hooke généralisée pour les solides (annexe B), donc sous l'hypothèse de petites déformations, il existe une relation simple entre contraintes et déformations :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sum_{(k,l)} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0} e_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon \\ \sigma &= \sum_{(k,l)} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0} e_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon\end{aligned}\quad (1.3.2)$$

Pour les solides, la loi de Hooke généralisée permet de définir un tenseur des coefficients élastiques, qui peut se réduire à une matrice symétrique 6×6 . De façon similaire, on pourra définir un tenseur de coefficients élastiques pour le milieu poreux, qui du fait des termes liés à la phase fluide se réduira cette fois à une matrice symétrique 7×7 . Il y a donc au plus 28 coefficients élastiques indépendants, contre 21 dans le cas solide.

Tout comme pour les solides, ce nombre de coefficients indépendants est amené à diminuer selon la classe du matériau. Attention, il convient toutefois de différencier isotropie/anisotropie dans le cas d'un solide et dans le cas d'un milieu poreux. Nous ne considérerons que des milieux poreux dont la phase solide est constituée d'un matériau isotrope. Pour autant le milieu poreux peut être structurellement anisotrope, si l'arrangement des phases fluide et solide n'est pas le même dans toutes les directions. C'est le cas de l'os trabéculaire notamment, considéré isotrope transverse d'un point de vue structurel, les travées osseuses présentant en général une direction préférentielle d'alignement. L'anisotropie n'est donc pas de même nature, mais les conséquences sur le tenseur élastique sont les mêmes. Le tenseur d'un milieu poreux anisotrope contiendra davantage de coefficients indépendants que celui d'un milieu isotrope. Ce sont autant de paramètres supplémentaires à connaître/mesurer pour caractériser un milieu poreux inconnu.

La référence [10] fournit l'expression des contraintes en fonction des déformations pour un milieu poreux isotrope. Avec les notations utilisées ici, ces relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2Ne_{11} + A(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Q\varepsilon \\ \sigma_{12} &= 2Ne_{12} \\ \sigma_{13} &= 2Ne_{13} \\ \sigma_{22} &= 2Ne_{22} + A(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Q\varepsilon \\ \sigma_{23} &= 2Ne_{23} \\ \sigma_{33} &= 2Ne_{33} + A(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Q\varepsilon \\ \sigma &= Q(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + R\varepsilon\end{aligned}\quad (1.3.3)$$

On y retrouve des similitudes avec celles d'un solide isotrope (Eq. B.3.3). Les coefficients A et N jouent un rôle similaire aux coefficients de Lamé du solide isotrope. La présence de la phase fluide fait cependant apparaître deux coefficients supplémentaires Q, et R. Il est possible d'écrire de la même façon ces relations pour un milieu poreux isotrope transverse [13]⁵, plus proche de

5. L'apparition des facteurs 2 vient de la définition de la déformation utilisée ici qui n'est pas la même que dans la référence [13].

l'os trabéculaire :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 2Ne_{11} + A(e_{11} + e_{22}) + Fe_{33} + M\varepsilon \\
 \sigma_{12} &= 2Ne_{12} \\
 \sigma_{13} &= 2Le_{13} \\
 \sigma_{22} &= 2Ne_{22} + A(e_{11} + e_{22}) + Fe_{33} + M\varepsilon \\
 \sigma_{23} &= 2Le_{23} \\
 \sigma_{33} &= Ce_{33} + F(e_{11} + e_{22}) + Q\varepsilon \\
 \sigma &= M(e_{11} + e_{22}) + Qe_{33} + R\varepsilon
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Il y a maintenant 8 coefficients élastiques indépendants, contre 4 pour un milieu poreux isotrope. À titre de comparaison il y en a seulement 5 pour un solide isotrope transverse (Eq. B.4.1).

1.3.2. Propagation d'une onde plane élastique

L'étude de la propagation d'une onde plane dans un solide passe par l'équation fondamentale de l'élasto-dynamique (annexe B). Elle s'écrit, projetée dans la direction $\vec{\xi}_i$:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.3.5}$$

La grande différence pour un milieu poreux, c'est qu'il y aura non pas une équation, mais deux, une pour chaque phase. Les déplacements dans les deux phases sont *a priori* différents ($u_i \neq U_i$), ce qui se traduit par des mouvements relatifs entre solide et fluide. Pour autant, les déplacements ne sont pas décorrélés. Comme les deux phases s'interpénètrent, le déplacement de l'une entraîne, dans une certaine mesure, le déplacement de l'autre. Ainsi, projetées selon la direction ξ_i les deux équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \phi_s \rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (u_i - U_i)}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\
 (1 - \phi_s) \rho_f \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (U_i - u_i)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}
 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

C'est ρ_a , appelée masse volumique apparente, qui va rendre compte du couplage entre les deux phases. Dans le cas général d'un milieu poreux anisotrope, ce paramètre est *a priori* différent selon la direction de propagation.

Milieu poreux isotrope

Pour un milieu poreux isotrope, nous pouvons considérer sans perte de généralité une propagation selon la direction $\vec{\xi}_1$. Dans ce cas les expressions se simplifient considérablement puisque les dérivées par rapport aux deux autres directions s'annulent. Il y a deux cas de figure : la polarisation longitudinale u_1 et les polarisations transverses u_2 et u_3 .

Intéressons-nous tout d'abord à la polarisation u_1 . Le système 1.3.6 devient ⁶

$$\phi_s \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (u_1 - U_1)}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + Q \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \tag{1.3.7}$$

$$(1 - \phi_s) \rho_f \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (U_1 - u_1)}{\partial t^2} = Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + R \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \tag{1.3.8}$$

6. En posant $P = (2N + A)$. P est alors l'équivalent du module de compression pour un solide.

Pour résoudre ce système de deux équations couplées nous allons chercher des solutions sous la forme d'ondes propagatives

$$u_1 = a_s e^{i(\omega t - k x_1)} \quad (1.3.9)$$

$$U_1 = a_f e^{i(\omega t - k x_1)} \quad (1.3.10)$$

où $k = \omega/v$ est le nombre d'onde associé à la vitesse v et la pulsation ω , a_s et a_f deux constantes. Le système devient alors

$$(\phi_s \rho_s + \rho_a) a_s - \rho_a a_f = \frac{1}{v^2} (P a_s + Q a_f) \quad (1.3.11)$$

$$-\rho_a a_s + ((1 - \phi_s) \rho_f + \rho_a) a_f = \frac{1}{v^2} (Q a_s + R a_f) \quad (1.3.12)$$

Notons $\rho_{11} = \phi_s \rho_s + \rho_a$ et $\rho_{22} = (1 - \phi_s) \rho_f + \rho_a$ afin de nous ramener aux notations de Biot [10]⁷. Par substitution on obtient finalement un polynôme d'ordre 2

$$(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_a^2) v^4 - (2Q \rho_a + R \rho_{11} + P \rho_{22}) v^2 + (PR - Q^2) = 0 \quad (1.3.13)$$

dont le discriminant vaut

$$\delta = (2Q \rho_a + R \rho_{11} + P \rho_{22})^2 - 4(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_a^2)(PR - Q^2) \quad (1.3.14)$$

et les racines

$$\begin{aligned} v_{\text{rapide, lente}}^2 &= \frac{(2Q \rho_a + R \rho_{11} + P \rho_{22}) \pm \sqrt{\delta}}{2(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_a^2)} \\ &= \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_a^2)(PR - Q^2)}}{2(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_a^2)} \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

en posant $\Delta = P \rho_{22} + R \rho_{11} + 2 \rho_a Q$ comme c'est usuellement le cas [15, 16]. On pourrait montrer que le discriminant et les deux racines sont positifs. Plus que le détail des calculs, c'est bien là le résultat intéressant : d'après la théorie de Biot, **dans un milieu poreux isotrope se propagent deux ondes longitudinales**. Elles sont appelées **onde lente et onde rapide**.

Avec quelques calculs supplémentaires, Biot donne plus d'informations sur ces deux ondes [10] : **l'onde rapide (resp. lente) correspond à des déplacements en phase (resp. en opposition de phase) dans le solide et dans le fluide**. Ce résultat souligne au passage que **chacune des deux ondes se propage à la fois dans le solide et dans le fluide**.

Voyons maintenant le cas des polarisations transverses u_2 et u_3 . Prenons u_2 (le résultat est identique avec u_3 puisque le milieu est isotrope). Le système 1.3.6 s'écrit cette fois

$$\phi_s \rho_s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (u_2 - U_2)}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad (1.3.16)$$

$$(1 - \phi_s) \rho_f \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (U_2 - u_2)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.17)$$

La résolution est plus simple que pour la polarisation longitudinale. La substitution de U_2 dans la première équation donne directement une équation d'onde avec une vitesse

$$v^2 = \frac{N}{\rho_{11} - \frac{\rho_a^2}{\rho_{22}}} \quad (1.3.18)$$

$$= \frac{N}{\phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \rho_f} \quad (1.3.19)$$

7. Biot pose en plus $\rho_{12} = -\rho_a$

Il n'y a qu'une seule vitesse pour les ondes transverses.

Milieu poreux isotrope transverse

Pour se rapprocher du cas de l'os trabéculaire, étudions la propagation d'une onde élastique dans un milieu poreux isotrope transverse. Cette fois-ci la direction de propagation a son importance. Commençons tout d'abord par une propagation selon la direction privilégiée, $\vec{\xi}_3$. Nous nous intéresserons uniquement à la polarisation longitudinale u_3 . Le système 1.3.6 s'écrit alors

$$\phi_s \rho_s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (u_3 - U_3)}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + Q \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} \quad (1.3.20)$$

$$(1 - \phi_s) \rho_f \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (U_3 - u_3)}{\partial t^2} = Q \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + R \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} \quad (1.3.21)$$

En dehors des coefficients, l'expression est identique à celle obtenue pour le milieu isotrope. Sans refaire le calcul nous savons donc qu'il devrait là encore y avoir deux ondes longitudinales. Cela correspond bien à ce qui est observé pour une propagation dans le sens des travées dans l'os trabéculaire.

Considérons à présent une propagation selon $\vec{\xi}_1$, perpendiculaire à l'axe principal. Là encore l'écriture du système 1.3.6

$$\phi_s \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (u_1 - U_1)}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + M \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \quad (1.3.22)$$

$$(1 - \phi_s) \rho_f \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 (U_1 - u_1)}{\partial t^2} = M \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + R \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \quad (1.3.23)$$

conduit à une expression similaire au cas isotrope. Cela signifie qu'il devrait également y avoir deux ondes longitudinales. Cela semble cette fois en contradiction avec ce qui a été observé dans l'os lorsque la propagation est perpendiculaire aux travées [7]. Plusieurs hypothèses pourraient cependant expliquer cette apparente contradiction. Tout d'abord il faut distinguer *observation* et *présence* des deux ondes. En effet, des vitesses très similaires ou une atténuation très forte d'une des deux ondes pourraient expliquer l'observation d'une seule onde. Ensuite, l'expression de l'une ou l'autre des deux ondes (en l'occurrence l'onde lente), pourrait éventuellement s'annuler selon les valeurs des coefficients élastiques, différentes selon la direction de propagation. Dans ce cas, il n'y aurait effectivement qu'une seule onde. Pour savoir si cela est envisageable, une étude approfondie des coefficients élastiques est nécessaire.

1.3.3. Expression des coefficients élastiques et de la masse volumique apparente

D'après les calculs précédents, lorsque la propagation est parallèle ou perpendiculaire à la direction privilégiée d'un milieu poreux isotrope transverse, les équations sont identiques à celles obtenues pour un milieu poreux isotrope. Autrement dit, en se bornant à ces directions particulières, il peut être envisagé d'appliquer à une structure isotrope transverse comme l'os des résultats obtenus pour des milieux isotropes. Or, dans le cas d'un milieu poreux isotrope, Biot et Willis [17] donne les expressions des coefficients élastiques inconnus P, Q et R. La notation de la

référence [15] est cependant ici préférée :

$$P = \frac{\phi_s \left(\phi_s - \frac{K_{\text{sec}}}{K_s} \right) K_s + (1 - \phi_s) \frac{K_s}{K_f} K_{\text{sec}}}{\phi_s + (1 - \phi_s) \frac{K_s}{K_f} - \frac{K_{\text{sec}}}{K_s}} + \frac{4}{3} N \quad (1.3.24)$$

$$Q = \frac{\left(\phi_s - \frac{K_{\text{sec}}}{K_s} \right) (1 - \phi_s) K_s}{\phi_s + (1 - \phi_s) \frac{K_s}{K_f} - \frac{K_{\text{sec}}}{K_s}} \quad (1.3.25)$$

$$R = \frac{(1 - \phi_s)^2 K_s}{\phi_s + (1 - \phi_s) \frac{K_s}{K_f} - \frac{K_{\text{sec}}}{K_s}} \quad (1.3.26)$$

avec K_{sec} le module de compressibilité isostatique du "squelette sec", c'est-à-dire lorsque le fluide est remplacé par du vide. N est à la fois le module de cisaillement du milieu poreux et du squelette sec, dans la mesure où seule la phase solide supporte le cisaillement. D'autre part la masse volumique apparente peut s'écrire

$$\rho_a = (\alpha - 1)(1 - \phi_s)\rho_f \quad (1.3.27)$$

avec α un paramètre appelé tortuosité, dont nous allons voir l'interprétation physique juste après.

Plus que les expressions elles-mêmes, relativement complexes, c'est les paramètres qui interviennent dans ces formules qui sont instructifs. À côté des paramètres ρ_s , K_s , ρ_f , K_f et ϕ_s déjà présents dans la formule de Wood, apparaissent trois nouveaux paramètres : K_{sec} , N et α . Ils sont particulièrement intéressants car tiennent compte de la structure géométrique des deux phases mais également du caractère élastique de la phase solide.

Tortuosité

Comme son nom l'évoque, la tortuosité rend compte de l'enchevêtrement de la phase fluide à l'intérieur de la phase solide. Pour autant, la définition précise de ce paramètre issu de la mécanique des fluides n'est pas si simple. La plus logique est probablement [18] :

$$\alpha = \frac{L_G}{L_E} \quad (1.3.28)$$

mais il n'est pas rare, selon le contexte, de voir la tortuosité définie comme α^2 , α^{-1} ou α^{-2} [19]. L_E est la distance euclidienne, c'est-à-dire la distance en ligne droite entre un point A et un point B, quel que soit le milieu traversé. La distance géodésique L_G correspond, elle, au chemin le plus court entre les deux points, parcouru en restant dans la phase fluide. La figure 1.3 illustre distances géodésique et euclidienne entre deux points A et B. On a toujours $L_G \geq L_E$ et donc $\alpha \geq 1$.

Cette définition fait de la tortuosité un paramètre purement géométrique, indépendant des propriétés mécaniques de chacune des phases, et de la fréquence. Elle donne également tout son sens à l'expression 1.3.27 de la masse volumique apparente. Si la tortuosité est égale à 1, cela signifie qu'une onde se propageant dans le fluide ne rencontre jamais de phase solide⁸. En conséquence, il n'y a aucun couplage entre phase fluide et phase solide, le déplacement de la phase fluide n'entraîne pas de déplacement de la phase solide. Et effectivement, dans ce cas, la masse volumique

8. Un milieu comme celui étudié dans la partie 4.3.3, constitué de barres solides orientées dans la même direction et entourées de fluide, vérifie cette condition par exemple.

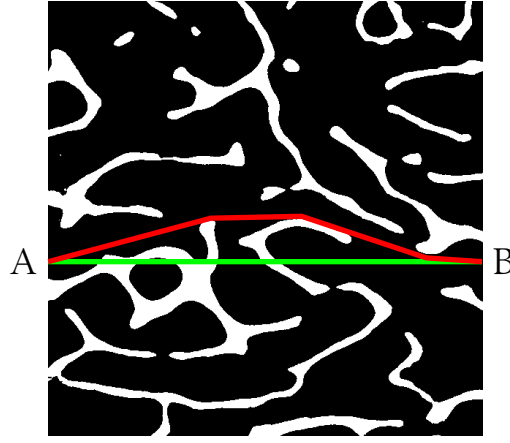


FIGURE 1.3. – Illustration des distances euclidienne (vert) et géodésique (rouge) entre les points A et B. La distance euclidienne est la distance en ligne droite entre les deux points. La distance géodésique est le chemin le plus court entre les deux points passant uniquement dans la phase fluide.

apparente ρ_a , terme de couplage entre les deux phases, s'annule. Au contraire si la tortuosité est plus grande que 1, c'est qu'à certains moments l'onde se propageant dans le fluide rencontre la phase solide, et peut alors la mettre en mouvement. Cette fois-ci la masse volumique apparente est non nulle.

La définition adoptée dans la théorie de Biot n'est cependant pas claire. En réalité, ce n'est pas Biot lui-même qui évoque le terme de tortuosité, mais les travaux menés par la suite [20]. Ils considèrent même dans certains cas une tortuosité dépendante de la fréquence [21], ce qui remet en cause la définition géométrique précédente.

1.3.4. Cas particuliers

Squelette rigide (stiff frame)

L'expression des coefficients P, Q, R peut être simplifiée sous l'**hypothèse de squelette rigide** ("stiff frame" en anglais), correspondant à $K_{\text{sec}} \gg K_f$ et $N \gg K_f$ [15]. Dans ce cas les vitesses des ondes rapide et lente s'écrivent :

$$v_{\text{rapide}} = \sqrt{\frac{K_{\text{sec}} + \frac{4}{3}N}{\phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \rho_f}} \quad (1.3.29)$$

$$v_{\text{lente}} = \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} \quad (1.3.30)$$

Bien que simplifiées, les expressions des deux vitesses contiennent toujours les mêmes paramètres. Mais la formule pour la vitesse de l'onde lente est particulièrement intéressante car, outre c_0 la vitesse dans le fluide que l'on peut supposer connue, elle ne fait intervenir que la tortuosité. La mesure de vitesse de l'onde lente donne donc facilement accès à ce paramètre caractérisant la structure du milieu poreux. Par suite, la mesure de vitesse de l'onde rapide permet d'obtenir $K_{\text{sec}} + \frac{4}{3}N$, c'est-à-dire le module de compression du squelette sec. C'est particulièrement intéressant dans l'optique de trouver des paramètres pertinents sur la structure osseuse, sous réserve que l'hypothèse d'un squelette rigide est fondée. Au passage, la racine carrée dans la formule 1.3.30

de l'onde lente laisse penser que la tortuosité de la théorie de Biot n'est pas celle décrite au paragraphe précédent, mais plutôt son carré : L_G^2/L_E^2 . Cette formule signifie également, au moins sous l'hypothèse squelette rigide, que la vitesse de l'onde lente est plus faible que celle dans le fluide.

On note que lorsque la densité du fluide tend vers zéro, la vitesse de l'onde rapide s'écrit

$$v_{\text{sec}}^L = \sqrt{\frac{K_{\text{sec}} + \frac{4}{3}N}{\phi_s \rho_s}} \quad (1.3.31)$$

Cette vitesse est la vitesse longitudinale dans le squelette sec. Elle est bien cohérente avec le fait que $K_{\text{sec}} + \frac{4}{3}N$ est le module de compression du squelette sec. Ainsi, la vitesse de l'onde rapide dans le milieu poreux peut également s'écrire

$$v_{\text{rapide}} = \sqrt{\frac{\phi_s \rho_s}{\phi_s \rho_s + (1 - \phi_s) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \rho_f}} v_{\text{sec}}^L \quad (1.3.32)$$

En utilisant cette formule pour l'onde rapide couplée à la formule 1.3.30 de l'onde lente, il n'y a alors que deux inconnues supplémentaires par rapport à la formule de Wood : v_{sec}^L et α .

Squelette "non consolidé" (unconsolidated frame)

Johnson et Plona [15] ont observé expérimentalement que le comportement de billes de verre dans l'eau n'était pas le même selon que les billes se touchaient simplement ou étaient légèrement fondues pour former une phase solide unique. Ils n'ont observé qu'une seule onde longitudinale dans le premier cas, contre deux dans le deuxième. La seule différence entre les deux, c'est que lorsque les billes sont seulement accolées, il n'y a pas à proprement parler une unique phase solide qui se tient. D'un point de vue mathématique les modules K_{sec} et N sont nuls. Dans ce cas particulier il y a alors $PR - Q^2 = 0$. L'équation 1.3.15 se simplifie et les vitesses des ondes rapide et lente s'écrivent

$$v_{\text{rapide}}^{K_{\text{sec}}=N=0} = \sqrt{\frac{\frac{\phi_s(1-\phi_s)\rho_s + (\alpha - 2(1-\phi_s) + \phi_s^2)\rho_f}{\alpha\rho_f(\phi_s\rho_s + (1-\phi_s)(1-\frac{1}{\alpha})\rho_f)}}{\frac{\phi_s}{K_s} + \frac{1-\phi_s}{K_f}}} \quad (1.3.33)$$

$$v_{\text{lente}}^{K_{\text{sec}}=N=0} = 0 \quad (1.3.34)$$

La vitesse de l'onde lente est nulle. Autrement dit, **lorsque les modules du squelette sec sont nuls, il n'y a qu'une seule onde longitudinale**. Ainsi, il y a des cas où la théorie de Biot ne prévoit effectivement qu'une seule onde, comme ce qui est observé dans l'os trabéculaire lorsque la propagation est perpendiculaire à la direction d'anisotropie.

Que devient la vitesse de l'onde rapide quand la tortuosité est très grande ? On trouve

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} v_{\text{rapide}}^{K_{\text{sec}}=N=0} = \sqrt{\frac{1}{\left(\phi_s \frac{1}{K_s} + (1-\phi_s) \frac{1}{K_f}\right) (\phi_s \rho_s + (1-\phi_s) \rho_f)}} \quad (1.3.35)$$

Cette expression nous est familière puisqu'il s'agit de la **formule de Wood**, qui peut donc être considérée comme un cas particulier de la théorie de Biot. Et effectivement, les hypothèses de phase solide non consolidée et de grande tortuosité correspondent parfaitement au milieu poreux obtenu par tirage aléatoire de 0 et de 1 (figure 1.1(c)) qui avait montré un très bon accord avec la formule de Wood.

1.3.5. Viscosité, atténuation et hypothèse haute fréquence

Dans tous les calculs qui précèdent, il n'est nulle part fait mention de la viscosité du fluide et de l'atténuation des ondes. Pourtant, la théorie de Biot prend en compte le profil du fluide dans les pores qui, du fait de la viscosité, n'est pas uniforme [10, 11]. La viscosité se retrouve au niveau de la tortuosité [21], qui varie alors en fonction de la fréquence. Par suite la masse volumique apparente, terme de couplage entre les phases, dépend également de la viscosité, qui de façon assez intuitive modifie l'interaction entre les deux phases. Cela se traduit par l'apparition d'un terme d'amortissement dans les équations du système 1.3.6. Au passage, la dépendance de la tortuosité vis-à-vis de la viscosité n'est pas anodine. La définition purement géométrique ne tient plus, ce qui pose la question de la signification et l'interprétation physique de la tortuosité dans le cadre de la théorie de Biot.

La théorie de Biot dans le cas le plus général (non traité ici) prévoit donc une **atténuation liée à la viscosité du fluide**. Pour autant, il est important d'avoir en tête que tout comme pour la formule de Wood, l'hypothèse basse fréquence de la théorie de Biot l'empêche de prendre en compte l'atténuation par diffusion. C'est ce qui peut expliquer la différence entre l'atténuation observée dans l'os et celle prédite par la théorie de Biot [16].

Ainsi, afin de simplifier des calculs déjà lourds, il a été choisi dans les calculs précédents d'occulter les termes liés à la viscosité du fluide, à l'origine d'une atténuation qui ne correspond pas à celle observée dans l'os. Cela revient à se placer sous une **hypothèse haute fréquence**. C'est une sorte de paradoxe puisque la théorie de Biot est une hypothèse basse fréquence. Mais en réalité les termes de "basse" et "haute" fréquence ne se rapporte pas aux mêmes phénomènes physiques. Nous parlons ici de haute fréquence vis-à-vis de la viscosité. L'épaisseur de la couche visqueuse est inversement proportionnelle à la fréquence :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_f \omega}} \quad (1.3.36)$$

À haute fréquence cette épaisseur devient négligeable devant la taille des pores et la tortuosité redevient un paramètre uniquement géométrique [20]. Tous les calculs précédents ont été implicitement menées sous cette hypothèse haute fréquence. Lorsque la viscosité est négligeable, **la théorie de Biot ne prédit aucune atténuation**.

1.4. Théories de milieux poreux appliquées à l'os

Comme évoqué précédemment, la théorie de Wood n'a à ma connaissance jamais été appliquée dans le cadre de l'os trabéculaire. La raison principale est certainement qu'elle ne permet pas d'expliquer le phénomène des deux ondes, objet de toutes les attentions. En revanche, d'autres théories ont été utilisées à de nombreuses reprises. Tout d'abord la théorie de Biot bien sûr, dont nous venons de voir un large panorama. Mais aussi une autre théorie qui n'a pas encore été évoquée ici : la théorie de Schoenberg. La dernière partie de ce chapitre est l'occasion de passer en revue les principaux résultats de la littérature sur l'application de ces théories à l'os trabéculaire.

1.4.1. Théorie de Schoenberg et os trabéculaire

Dans la théorie de Schoenberg [22], les milieux poreux sont modélisés par strates successives de phase solide et de phase fluide périodisées. Ce modèle paraît très simpliste à première vue, et il ne rend effectivement pas parfaitement compte de la structure complexe de l'os trabéculaire, mais il n'en est pas moins très intéressant. Grâce à sa simplicité, il ne fait intervenir que peu de

paramètres. En fait, par rapport à la formule de Wood, le seul paramètre supplémentaire est la vitesse des ondes transverses dans la phase solide. Notamment, aucune viscosité ni atténuation n'est prise en compte. En ce sens, cette théorie se situe dans l'hypothèse haute fréquence de la théorie de Biot. Mais le fait qu'elle comporte moins de paramètres la rend plus facilement utilisable que cette dernière. Autre point intéressant : tel que modélisé par Schoenberg, le milieu poreux est nécessairement isotrope transverse, ce qui le rapproche de l'os trabéculaire.

Tout comme la théorie de Biot, **la théorie de Schoenberg prévoit, sous certaines conditions, la propagation de deux ondes longitudinales**. Toutefois, **une seule onde longitudinale existe lorsque les strates sont exactement perpendiculaires à la direction de propagation**. Ce résultat fait écho à ce qui est observé dans l'os lorsque la propagation est perpendiculaire aux travées. Nous avons vu que la théorie de Biot pouvait d'une certaine manière également le prédire, mais le calcul des paramètres est particulièrement complexe et l'influence de l'angle d'incidence compliquée à retranscrire mathématiquement.

Forts de cette constatation, Hughes *et al.* [16] ont entrepris de confronter les théories de Biot et de Schoenberg à des mesures sur des échantillons d'os trabéculaire. Seules les vitesses sont étudiées (la théorie de Schoenberg ne prenant pas en compte l'atténuation), en fonction de l'angle d'incidence. Les vitesses théoriques obtenues avec la théorie de Biot ne tiennent cependant pas compte de cette direction de propagation, puisqu'ils n'ont considéré que la version isotrope de la théorie, qui nécessite déjà d'appliquer des ajustements pour certains paramètres difficilement mesurables. En revanche ils ont pu comparer les mesures aux valeurs attendues avec la théorie de Schoenberg en fonction de l'angle d'incidence. Cette comparaison montre un bon accord qui laisse penser que les vitesses dans l'os trabéculaire pourraient être correctement prédites par la théorie de Schoenberg.

1.4.2. Théorie de Biot et os trabéculaire

De façon assez surprenante, la première fois que la théorie de Biot a été associée à l'os, il s'agissait d'os cortical [4]. Ce n'est que plusieurs années plus tard qu'elle fut utilisée dans le cadre de l'os trabéculaire [23]. Dès lors, de nombreux travaux associant ce type d'os et la théorie de Biot ont vu le jour. Voici un panorama des différents résultats.

Paramètres

La théorie de Biot est celle qui prend en compte le plus grand nombre de paramètres, et donc potentiellement celle qui peut le mieux décrire une large gamme de milieux poreux. Le tableau ci-dessous récapitule les paramètres intervenant dans les diverses théories abordées dans ce chapitre.

Formule de Wood	$K_f, K_s, \rho_f, \rho_s, \phi_s$
Théorie de Schoenberg	$K_f, K_s, \rho_f, \rho_s, \phi_s, c_T$
Théorie de Biot haute fréquence	$K_f, K_s, \rho_f, \rho_s, \phi_s, N, \alpha, K_{sec}$

La formule de Wood ne prend pas en compte le caractère élastique de la phase solide, et n'a pour paramètre structurel que la fraction solide. La théorie de Schoenberg prend en compte un paramètre supplémentaire, justement lié à la nature élastique du solide (cisaillement). La théorie de Biot sous l'hypothèse haute fréquence prend elle aussi en compte l'élasticité *via* le paramètre N , mais surtout, par rapport aux deux autres théories, les paramètres N , α et K_{sec} rendent compte de la micro-structure du milieu poreux. C'est très intéressant pour le diagnostic de l'ostéoporose, mais, dans le même temps, le trop grand nombre de paramètres de la théorie de Biot est un handicap. Les travaux de Hughes *et al.* [16] discutés juste avant en sont l'illustration. L'application de la théorie de Schoenberg a montré de meilleurs résultats que la théorie de Biot puisque celle-ci

n'a pas pu être pleinement appliquée. Certains paramètres difficilement mesurables nécessitent d'être ajustés. De plus, l'aspect anisotrope de l'os n'a pas été pris en compte, ce qui a conduit à une seule valeur de vitesse pour chacune des deux ondes, quelle que soit la direction de propagation. En réalité pour prendre en compte rigoureusement l'anisotropie, les coefficients N , α et K_{sec} devraient être des tenseurs. Les travaux de Cowin *et al.* [24] vont effectivement dans ce sens, à travers la "fabric dependence". D'un point de vue expérimental, mesurer des tenseurs est encore plus délicat que mesurer de simples scalaires. *A minima* donc, en supposant l'os isotrope transverse, des valeurs différentes de ces paramètres devraient être considérées si la propagation est parallèle ou perpendiculaire à la direction des travées. À cela s'ajoute les termes liés à la viscosité du fluide qui n'ont pas été pris en compte ici. C'est donc un grand nombre de paramètres qu'il faut mesurer dans un milieu poreux inconnu, ce qui est difficilement faisable en pratique, *a fortiori* dans un tissu vivant comme l'os.

La résolution du problème inverse (obtention des propriétés du matériau à partir du signal ultrasonore) est donc particulièrement ardue. Il est bien souvent nécessaire de procéder à des ajustements à plusieurs paramètres pour déduire les paramètres non directement mesurables [16, 25, 26]. Dans ces conditions, les résultats de la théorie de Biot semblent coïncider avec les vitesses observées expérimentalement. Le premier problème qui se pose avec ces multiples ajustements est de savoir s'il y a bien unicité de la solution. Mais surtout, cela suppose que la théorie de Biot est bien applicable à l'os. Or, compte-tenu des dimensions caractéristiques de l'os trabéculaire ([27], chapitre 1) et des fréquences cliniques (de l'ordre de 1 MHz), l'hypothèse d'homogénéisation intrinsèque de la théorie de Biot est discutable. La meilleure preuve en est son incapacité à rendre compte de l'atténuation, que nous allons maintenant aborder.

Atténuation

Le paramètre qui a jusqu'à maintenant montré l'intérêt clinique le plus important pour le diagnostic de l'ostéoporose est le BUA (Broadband Ultrasound Attenuation) [28]. Il s'agit de la pente du coefficient d'atténuation (exprimé en général en $\text{dB} \cdot \text{cm}^{-1}$) en fonction de la fréquence, mesurée au niveau du calcaneus pour des raisons de simplicité d'accès. Pour autant, la raison du comportement linéaire en fréquence du coefficient d'atténuation n'est, 30 ans plus tard, toujours pas expliquée. Parmi les théories passées en revue, seule la théorie de Biot sans hypothèse haute fréquence peut prédire une atténuation, si tant est qu'elle est uniquement d'origine visqueuse. Mais la comparaison avec l'atténuation observée dans l'os trabéculaire a été infructueuse [23].

L'atténuation prédite par la théorie de Biot repose sur la viscosité du fluide. Étudier des fluides de viscosités différentes devrait permettre de déterminer s'il s'agit effectivement d'un paramètre important dans l'atténuation observée dans l'os. Deux études [8, 29] sont disponibles à ce sujet dans la littérature, et les résultats sont contradictoires. Alors que l'une [29] montre que remplacer la moelle par de l'eau modifie vitesses et atténuation dans l'os, l'autre [8] montre qu'un os saturé de moelle, d'eau ou même d'alcool se comporte sensiblement de la même façon. La première plaide donc en faveur d'une atténuation explicable par la théorie de Biot. La deuxième suggère au contraire qu'elle n'est d'aucun recourt pour prédire l'atténuation dans l'os. L'influence précise de la viscosité de la moelle sur l'atténuation dans l'os trabéculaire reste donc à élucider.

La diffusion pourrait être à l'origine de l'atténuation apparente observée dans l'os. En effet, du fait de l'hétérogénéité de la structure, au fil de la propagation une onde initialement plane voit une partie de son énergie être redistribuée dans d'autres directions que la direction incidente. Il ne s'agit pas là, contrairement à l'absorption intrinsèque, de perte d'énergie acoustique. Il s'agit plutôt d'une décroissance progressive de la partie de l'onde qui a conservé les propriétés de l'onde initiale (polarisation et direction de propagation). Son amplitude dépend naturellement de la micro-structure, et fluctue d'un point à l'autre et d'un échantillon à l'autre, même si leurs paramètres macroscopiques (porosité, tortuosité,...) sont identiques. Ces considérations ont amené les

physiciens à définir l'onde dite cohérente, c'est-à-dire l'onde moyennée sur toutes les réalisations du désordre. Dans cette approche, qui est celle des théories de la diffusion, un milieu donné est considéré comme une réalisation particulière d'un processus aléatoire. L'atténuation par diffusion est alors celle de l'onde cohérente, et ne doit pas être confondue avec l'atténuation d'origine visqueuse. Nous aborderons ceci plus en détail au chapitre suivant.

1.5. Conclusion

Il existe plusieurs théories d'ondes en milieux poreux, prenant en compte plus ou moins de paramètres. Elles ont en commun de toutes reposer sur une hypothèse d'homogénéisation du milieu, qui en conséquence les limitent à des études basse fréquence. Parmi elles, les théories de Schoenberg et de Biot prévoient toutes deux la propagation de deux ondes longitudinales dans un milieu poreux, tout comme ce qui est observé dans l'os trabéculaire sous certaines conditions. Ce résultat explique à lui seul l'intérêt porté à ces théories pour la propagation des ultrasons dans l'os poreux.

Pour autant l'utilisation de ces théories d'homogénéisation dans le cadre de l'os reste discutable. Le bon accord trouvé entre vitesses prédites par la théorie de Biot et observées dans l'os passe par des ajustements à plusieurs paramètres qui ne permettent pas de s'assurer de la validité de la théorie. D'autre part, l'hypothèse basse fréquence suppose de négliger la diffusion, pourtant observée dans l'os trabéculaire. Cela peut expliquer que l'atténuation prédite par la théorie de Biot, basée uniquement sur la viscosité du fluide, ne correspond pas à celle observée dans l'os. En conséquence, après avoir considéré l'os trabéculaire comme un milieu poreux, nous envisagerons dans le prochain chapitre l'os comme un milieu multiplement diffusant. Ce simple changement de vision de la structure apporte un nouveau formalisme et de nouvelles théories.

PROPAGATION D'ONDES EN MILIEUX MULTIPLEMENT DIFFUSANTS

Le chapitre précédent offrait un panorama des différentes théories d'ondes en milieux poreux, largement utilisées dans le cadre de la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire. Néanmoins, il a aussi montré les limites de l'application de ces théories à l'os poreux. D'autres voies ont été explorées, et notamment les théories de diffusion multiple [30]. Tout comme les théories d'ondes en milieux poreux, il en existe de différents degrés de complexité, selon les approximations qui sont faites. La plus simple d'entre elles, l'Independent Scattering Approximation (ISA), fera l'objet d'une attention particulière à la fin de ce chapitre.

Utiliser une théorie différente ne change bien évidemment pas la structure étudiée, mais cela change la façon de la décrire. Pour mieux appréhender ce nouvel environnement, nous allons commencer ce chapitre par des expériences sur des mousses solides commercialisées par la société Sawbones, censées se rapprocher de l'os trabéculaire. L'intérêt est double. Ce sera l'occasion d'introduire les notions et vocabulaire associés aux théories de diffusion multiple, tout en testant les possibilités de ces mousses en tant qu'échantillons modèles d'os trabéculaire vis-à-vis des ultrasons.

2.1. Quelques définitions importantes

2.1.1. Onde cohérente

Dans les théories de diffusion multiple, l'objet d'étude est un matériau contenant des hétérogénéités, dont la distribution est considérée comme aléatoire. En conséquence, lors de l'émission d'une onde dans ce milieu, le champ φ (potentiel scalaire, potentiel vecteur, déplacement, contrainte,...) peut être vu comme une réalisation d'un processus aléatoire. Il peut donc s'écrire $\varphi = \langle \varphi \rangle + \delta\varphi$, somme d'une moyenne d'ensemble et d'une variation par rapport à cette moyenne. La moyenne d'ensemble $\langle \varphi \rangle$ est appelée **onde cohérente**. C'est par définition la moyenne résultant d'une infinité de réalisations.

Cette onde cohérente est solution de l'équation de Dyson qui est une équation exacte [31]. Malheureusement, dans le cas le plus général, il n'est pas possible de résoudre analytiquement cette équation. Il est donc nécessaire de faire hypothèses et approximations. Voilà pourquoi il existe différentes théories de diffusion multiple, en fonction des hypothèses qui sont faites et qui s'adaptent plus ou moins au milieu étudié. Nous verrons plus en détail la plus simple d'entre elles, l'Independent Scattering Approximation (ISA), dans la dernière partie de ce chapitre.

Nous avons vu au chapitre précédent que la théorie de Biot, et même les théories de milieux poreux en général, reposaient sur l'hypothèse d'homogénéisation, c'est-à-dire sur l'utilisation de propriétés effectives, moyennées, du milieu. Lorsqu'on s'intéresse à l'onde cohérente, c'est cette fois-ci les signaux ultrasonores qui sont moyennés. Le résultat n'est donc *a priori* pas le même, et les hypothèses sur le milieu non plus.

2.1.2. Longueurs caractéristiques d'atténuation

Lorsqu'un milieu est atténuant, le nombre d'onde devient complexe : $k = k_r + ik_i$. En conséquence, une onde plane se propageant dans une direction z s'écrit

$$\varphi(z, t) = \varphi_0 e^{i(kz - \omega t)} = \varphi_0 e^{i(k_r z - \omega t)} e^{-k_i z} \quad (2.1.1)$$

Il apparaît donc un terme de décroissance exponentiel, avec un coefficient d'atténuation k_i homogène à l'inverse d'une longueur.

Selon les champs d'application, la convention utilisée pour caractériser l'atténuation n'est pas toujours la même. Si dans le domaine de l'os c'est effectivement le coefficient d'atténuation k_i du champ qui va être considéré, dans le domaine des ondes en milieux complexes il est plus courant d'avoir recours à la longueur caractéristique d'atténuation de l'intensité, notée l_{att} . Ces deux paramètres sont toutefois reliés par la relation ¹

$$l_{att} = \frac{1}{2k_i} \quad (2.1.2)$$

Cette longueur caractéristique l_{att} correspond à l'épaisseur de matériau au bout de laquelle l'intensité du signal est divisée par un facteur $e \approx 2.7$. Autrement dit, plus cette longueur est petite, plus le matériau est absorbant. D'autre part, elle prend en compte les atténuations de tous types. Pour ce qui nous concerne, les phénomènes intervenant majoritairement dans l'atténuation sont l'absorption et la diffusion ². Si les coefficients d'atténuation respectifs de ces deux phénomènes sont notés k_i^{abs} et k_i^{diff} , alors il vient assez naturellement $k_i = k_i^{abs} + k_i^{diff}$. À l'image de la longueur caractéristique d'atténuation l_{att} , il est possible de définir des longueurs caractéristiques d'atténuation par absorption l_{abs} et par diffusion l_e . Ces longueurs sont également reliées aux coefficients d'atténuation par les relations

$$l_{abs} = \frac{1}{2k_i^{abs}} \quad \text{et} \quad l_e = \frac{1}{2k_i^{diff}} \quad (2.1.3)$$

Par suite, les différentes longueurs caractéristiques sont reliées par la formule

$$\frac{1}{l_{att}} = \frac{1}{l_{abs}} + \frac{1}{l_e} \quad (2.1.4)$$

Il est à noter que la longueur caractéristique d'atténuation par diffusion l_e est plus communément appelée libre parcours moyen de diffusion. Lorsque l'épaisseur L de l'échantillon est inférieure au libre parcours moyen, le milieu est alors considéré simplement diffusant. C'est le cas notamment des tissus mous du corps humain pour des fréquences de l'ordre de quelques MHz. C'est grâce à cela qu'il est possible de faire de l'imagerie échographique, car dans le régime simplement diffusant il y a une équivalence entre temps de vol et distance à la cible.

Plus l'épaisseur L est importante devant l_e , plus l'onde est susceptible de subir de multiples diffusions en traversant le milieu. À la limite $L \gg l_e$, la contribution de diffusion multiple est

1. Le facteur 2 vient du fait que l_{att} est un paramètre lié à l'intensité alors que k_i est lié à l'amplitude du champ.

2. Compte tenu des faibles fractions solides des mousses, l'atténuation résultant des phénomènes d'interfaces (transmission et réflexion) est négligeable.

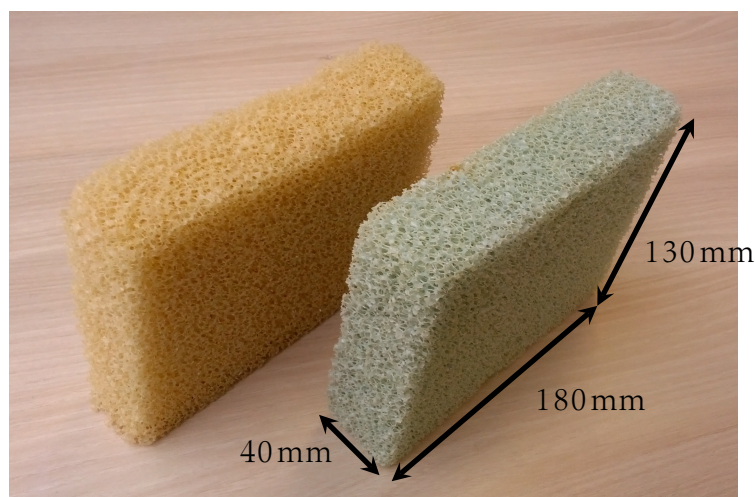


FIGURE 2.1. – Les deux échantillons de mousses solides Sawbones étudiés. Ils ne diffèrent que par leur fraction solide : 8% pour l'échantillon jaune et 11% pour l'échantillon bleu.

largement prépondérante, on parle alors de régime purement diffusif. Dans ce cas l'équivalence entre temps de vol et distance est perdue et une imagerie au sens classique du terme n'est donc plus possible. Cette définition montre que le caractère multiplement diffusant n'est pas une propriété intrinsèque d'un matériau, mais qu'elle dépend de son épaisseur.

2.2. Expériences sur les mousses solides Sawbones

2.2.1. Les échantillons

Sawbones³ est une société spécialisée dans les modèles médicaux en tout genre. À ce titre, elle commercialise notamment des mousses solides, censées reproduire les caractéristiques de l'os trabéculaire (figure 2.1). Néanmoins, le public cible de la société est plutôt constitué de chirurgiens (qui testent des produits de consolidation de l'os) que de chercheurs sur la propagation des ultrasons dans l'os. En conséquence, si l'aspect visuel est effectivement proche de l'os trabéculaire, toutes les propriétés matérielles ne sont pas reproduites. En particulier, les propriétés mécaniques de ces mousses ne sont pas celles de l'os mais plutôt celles du plastique (polyuréthane, PUR en abrégé). Autre problème, ces mousses sont isotropes, contrairement à l'os. Or nous avons vu dans le chapitre précédent l'influence qu'avait l'anisotropie sur la propagation des ultrasons dans l'os. Ainsi, ces mousses ne sont certainement pas un modèle parfait pour étudier et comprendre la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire. Pour autant, bien que ces échantillons ne soient pas complètement fidèles à l'os, il est déjà intéressant d'étudier leur comportement ultrasonore.

2.2.2. Expériences en transmission

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est relativement simple (figure 2.2). Deux transducteurs (Imasonic) identiques sont immergés dans une cuve l'un en face de l'autre, séparés d'une distance $D = 140$ mm. L'échantillon, jaune ($\phi_s = 0.08$) ou bleu ($\phi_s = 0.11$), est placé entre les deux transducteurs et maintenu par une pince, de telle sorte qu'il soit à 50 mm de chacun des transducteurs. Il est important de préciser que ces échantillons ont été préalablement dégazés de nombreuses heures

3. <http://www.sawbones.com/>

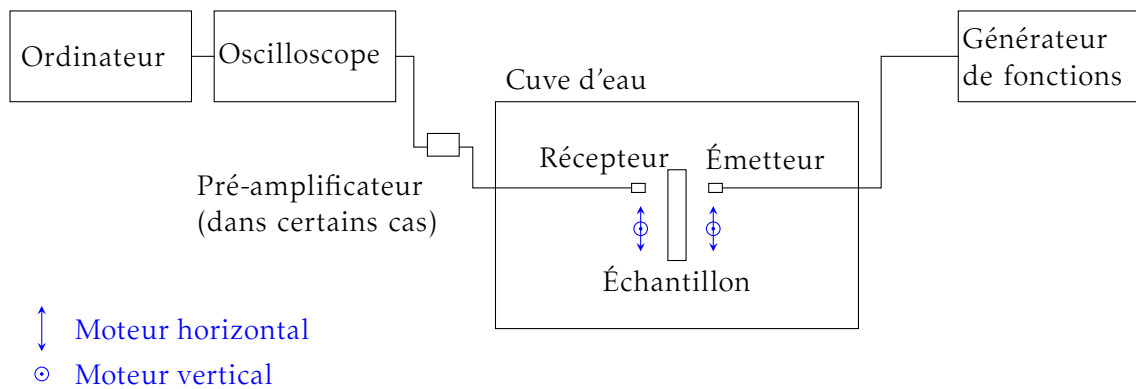


FIGURE 2.2. – Schéma du dispositif expérimental en transmission.

sous cloche à vide. C'est une étape particulièrement difficile pour des milieux poreux comme ces mousses, mais nécessaire pour éviter autant que possible toute présence de bulle d'air qui perturberait les résultats.

Chacun des transducteurs est placé sur un ensemble de deux moteurs, permettant ainsi des translations horizontales et verticales. L'un des transducteurs, qui joue le rôle d'émetteur, est relié à un générateur de fonctions (Tektronix AFG 3101) tandis que l'autre transducteur, le récepteur, est relié à un oscilloscope (Tektronix TDS 3054B) interfacé avec un ordinateur. Trois paires de transducteurs sont utilisées, de fréquences centrales 1,25 MHz, 2,25 MHz et 3,25 MHz. Les transducteurs, de forme rectangulaire, ont une hauteur de 10 mm et une largeur respectivement de 0,9 mm, 0,5 mm et 0,35 mm. Le signal émis est une impulsion de deux périodes de sinusoïde à la fréquence centrale du transducteur, et de période de répétition 1 ms. À noter que pour les plus hautes fréquences, un pré-amplificateur (Sofranel) est ajouté entre le récepteur et l'oscilloscope afin d'améliorer le rapport signal sur bruit.

Les moteurs permettent de balayer l'ensemble de l'échantillon, les deux transducteurs restant en permanence l'un en face de l'autre. Cela permet d'obtenir une estimation de l'onde cohérente en prenant la moyenne de tous les signaux obtenus. En effet, d'après la définition donnée précédemment, l'onde cohérente résulte en théorie de la moyenne sur un nombre infini d'échantillons, impossible à obtenir en pratique. D'autre part, l'onde cohérente est normalement une moyenne d'ensemble, c'est-à-dire une moyenne sur différents échantillons de même statistique. Là encore, ce n'est pas envisageable lorsque l'on ne dispose que d'un seul échantillon. Cette moyenne d'ensemble est donc remplacée par une moyenne spatiale, ce qui revient à considérer une hypothèse d'ergodicité.

Il y a pour les trois paires de capteurs 11 positions verticales différentes espacées de la demi-hauteur des éléments, soit 5 mm. Ces positions sont choisies pour ne pas être trop proches des bords de l'échantillon, susceptibles d'apporter des signaux parasites. Le nombre de positions horizontales varie en revanche en fonction des transducteurs. Le pas des moteurs horizontaux correspond en effet à la largeur des transducteurs. Au total, il y a donc respectivement plus de 1200, 2200 et 3200 signaux moyennés à 1,25 MHz, 2,25 MHz et 3,25 MHz. À noter que ces réalisations ne sont pas nécessairement toutes indépendantes. En effet, pour connaître le nombre de réalisations indépendantes il faudrait connaître précisément la longueur de corrélation du milieu. D'autre part, les signaux reçus sont déjà des signaux en partie moyennés puisqu'intégrés sur toute la surface du transducteur (même si cette surface est relativement petite ici). Le nombre de signaux moyennés reste malgré tout une information d'importance.

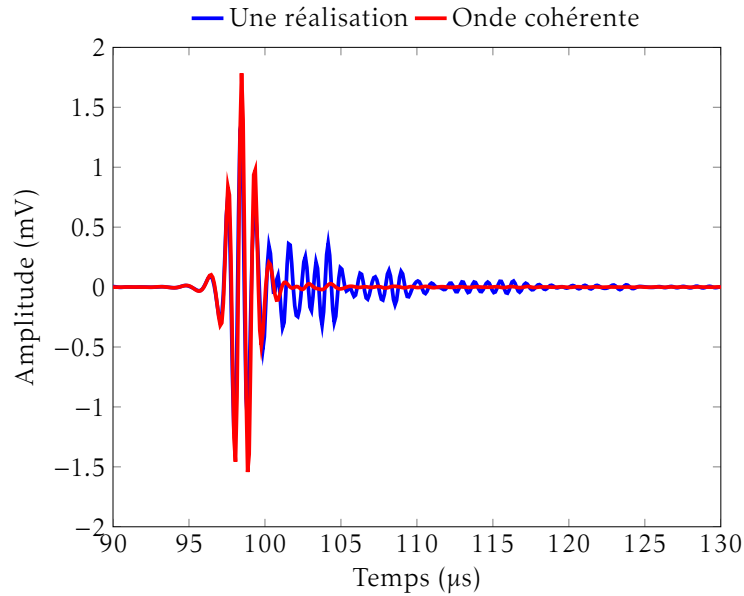


FIGURE 2.3. – Signaux obtenus après propagation à travers l'échantillon jaune, pour un signal émis de fréquence centrale 1,25 MHz. En bleu, une seule réalisation, obtenue pour une position donnée de l'émetteur et du récepteur. En rouge, moyenne de tous les champs obtenus avec les diverses positions du couple de transducteurs. C'est un estimateur de l'onde cohérente.

Première observation

La figure 2.3 illustre la différence entre une réalisation (bleu) et la moyenne sur toutes les réalisations (rouge), estimation de l'onde cohérente. Chaque réalisation a été filtrée à l'aide d'un filtre de Butterworth d'ordre 3 et de bande passante 100%, tout comme le signal de référence dans l'eau. On constate que la réalisation seule a une extension temporelle beaucoup plus grande que le signal moyenné. Il est constitué d'une première arrivée, aussi appelée onde balistique, correspondant au trajet direct à travers l'échantillon. À cette onde balistique s'ajoute tous les autres chemins empruntés à travers le milieu, plus ou moins longs, qui expliquent l'étalement dans le temps des différentes arrivées. On parle alors de coda pour désigner toutes ces arrivées successives après l'onde balistique. Elle est pour majorité constituée de signaux incohérents, ce qui explique la durée plus courte du signal moyenné.

Une seule arrivée est observée sur le signal moyenné après propagation dans la mousse poreuse. Pour autant ce n'est pas nécessairement en contradiction avec la théorie de Biot, car nous avons vu que dans certains cas la vitesse de l'onde lente pouvait s'annuler. D'autre part, **ne pas observer une onde ne veut pas dire qu'elle n'existe pas**. Plusieurs raisons peuvent être évoquées pour cela. Tout d'abord, l'une des deux ondes peut être d'amplitude beaucoup plus faible que l'autre, la rendant ainsi difficilement observable. C'est souvent le cas de l'onde rapide dans l'os trabéculaire par exemple. Une autre raison peut venir du matériau utilisé pour fabriquer la mousse. Le polyuréthane a en effet des propriétés très différentes de la roche ou de l'os. La masse volumique est $\rho_s^{\text{PUR}} = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, et les vitesses des ondes longitudinales et transverses respectivement de l'ordre de $c_L^{\text{PUR}} = 2,6 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ et $c_T^{\text{PUR}} = 1,3 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. Le contraste avec les propriétés de l'eau est donc beaucoup plus faible. Une conséquence assez intuitive est que les éventuelles vitesses des ondes lente et rapide sont a priori plus proches que dans le cas des os ou des roches, ce qui rend leur séparation temporelle plus délicate. Ainsi il n'est pas impossible que la distance de propagation ne soit pas suffisante pour observer distinctement les deux ondes. Augmenter cette distance

se traduirait cependant par une atténuation plus forte, qui pourrait empêcher l'observation d'une des deux ondes.

Estimation de la vitesse de l'onde

Afin d'estimer la vitesse de l'onde se propageant dans les mousses (saturées d'eau), un signal de référence de propagation dans l'eau seule est enregistré. Connaissant la distance D entre les deux transducteurs, le temps d'arrivée t_{ref} du signal permet de déduire simplement la vitesse du son dans l'eau :

$$c_0 = \frac{D}{t_{\text{ref}}} = 1.47 \pm 0,03 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1} \quad (2.2.1)$$

Aucune différence significative n'a été observée entre les trois gammes de fréquences.

Après ajout de l'échantillon, d'épaisseur $L = 40 \text{ mm}$, le temps d'arrivée $t_{\text{éch}}$ de l'onde cohérente s'écrit alors

$$t_{\text{éch}} = \frac{D - L}{c_0} + \frac{L}{v_{\text{éch}}} \quad (2.2.2)$$

avec $v_{\text{éch}}$ la vitesse des ondes longitudinales dans l'échantillon. Autrement dit, la vitesse vaut

$$v_{\text{éch}} = \frac{L}{t_{\text{éch}} - \frac{D - L}{c_0}} \quad (2.2.3)$$

Là encore, les vitesses observées dans les deux échantillons et pour les trois gammes de fréquences n'ont pas montré de différences significatives, compte tenu de l'incertitude⁴. Le but est simplement ici d'avoir un ordre d'idée de la vitesse de propagation dans ces échantillons. La vitesse mesurée est ainsi

$$v_{\text{éch}} = 1.6 \pm 0,2 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1} \quad (2.2.4)$$

C'est donc légèrement plus rapide que la vitesse du son dans l'eau.

Comparaison aux simulations

Pour tenter d'y voir plus clair sur ce phénomène des deux ondes, il peut être intéressant de simuler la propagation des ultrasons dans ces mousses. Pour cela, des cubes d'environ 40 mm^3 ont été prélevés sur chacune des deux mousses puis soumis à une microtomographie aux rayons X, afin d'avoir accès à une version numérique de la structure. Ces données ont été obtenues grâce au concours de Renaud Boistel, de l'Université de Poitiers. Après diverses étapes de traitement numérique⁵, la simulation est effectuée à l'aide de SimSonic. L'avantage de ces simulations est qu'il n'y a pas d'atténuation par absorption, ce qui pourrait permettre d'observer une onde trop atténuée dans les conditions expérimentales. D'autre part, la possibilité d'étudier la propagation à l'intérieur du milieu et pour différentes distances de propagation, donc d'obtenir un diagramme bi-dimensionnel de la propagation, peut également aider à discriminer les deux ondes dans le cas où leurs vitesses de propagation seraient proches. Les caractéristiques des simulations sont semblables à celles du chapitre précédent et décrites en annexe A. Les paramètres tels que les dimensions des cartes (dimensions des cubes), le pas spatial (similaire à la résolution du tomographe utilisé, soit $\Delta x = 60,7 \mu\text{m}$), la fréquence centrale (1,25 MHz) et les propriétés mécaniques

4. Elle tient compte notamment de la forte atténuation qui rend la mesure du temps d'arrivée délicate.

5. Ces étapes consistent essentiellement en un seuillage des données brutes, pour isoler la composante provenant du polyuréthane, puis une binarisation pour obtenir un milieu biphasique.

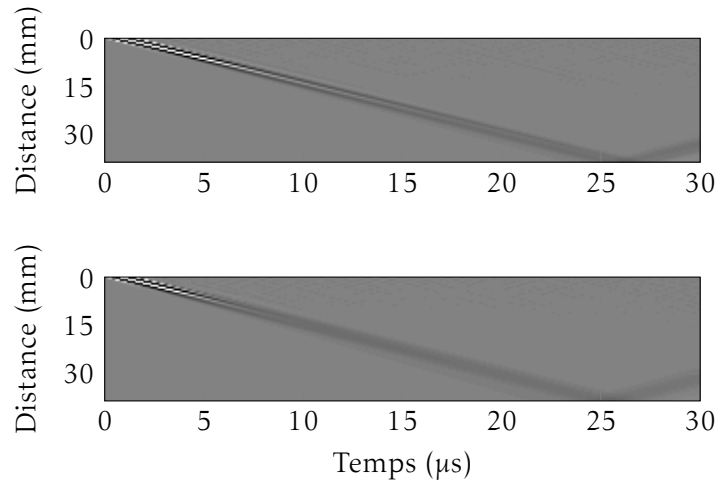


FIGURE 2.4. – Simulations de la propagation d’une onde ultrasonore de fréquence centrale 1,25MHz dans des versions numérisées des mousses Sawbones, obtenues par microtomographie. En haut, échantillon le moins dense (jaune). En bas, échantillon le plus dense (bleu).

de la phase solide (celles du polyuréthane, données précédemment) sont cependant adaptés aux échantillons.

Le calcul de la fraction solide des cartes montre un certain biais par rapport à la réalité. En effet, la fraction solide est de 12% pour la version numérique contre 8% annoncé par le fabricant pour l’échantillon jaune, et de 21% contre 11% pour l’échantillon bleu. Cette valeur de fraction solide plus élevée dans les deux cas peut s’expliquer par la résolution du microtomographe ($60,7\mu\text{m}$) pas assez précise pour décrire fidèlement les "travées" des mousses, de l’ordre de la centaine de microns comme dans le cas de l’os trabéculaire⁶. Néanmoins, les conclusions de ces simulations, essentiellement qualitatives, qui consiste à savoir si deux ondes longitudinales peuvent être observées ou non, ne devraient pas en être trop modifiées. La figure 2.4 montre donc les propagations simulées dans les deux milieux. Elles sont très similaires. Dans les deux cas, une seule onde semble effectivement se propager (un seul front d’onde), ce qui confirme les observations expérimentales. Par ailleurs, la pente de ces fronts d’onde confirme une vitesse de l’onde de l’ordre de $1,6\text{mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ dans chacun des deux échantillons (compte tenu des différences observées entre fraction solide des mousses et des cartes numériques, il n’y a pas de sens à donner une valeur plus précise des vitesses).

Atténuation

Revenons aux données expérimentales. Pour avoir une idée de l’atténuation du milieu, connaissant l’épaisseur traversée lors de la propagation ($L = 40\text{mm}$), il suffit de comparer l’énergie totale du signal moyenné $\langle \varphi \rangle$ à celle du signal de référence dans l’eau φ^{ref} . Le coefficient de transmission de l’onde cohérente s’écrit en effet [32] :

$$T = \frac{\int |\langle \varphi(t) \rangle|^2 dt}{\int |\varphi^{\text{ref}}(t)|^2 dt} = e^{-\frac{L}{l_{\text{att}}}} \quad (2.2.5)$$

6. Dans une certaine mesure, le choix du seuil pour les données de tomographie peuvent également influencer la fraction solide obtenue.

Le calcul de ce coefficient de transmission donne donc directement accès à l_{att} . Le tableau suivant récapitule les différentes valeurs de longueur caractéristique d'atténuation obtenues :

	$f_c = 1,25 \text{ MHz}$	$f_c = 2,25 \text{ MHz}$	$f_c = 3,25 \text{ MHz}$
Échantillon jaune ($\phi_s = 0.08$)	$l_{\text{att}} = 5.4 \pm 0,3 \text{ mm}$	$l_{\text{att}} = 3.3 \pm 0,4 \text{ mm}$	$l_{\text{att}} = 2.6 \pm 0,4 \text{ mm}$
Échantillon bleu ($\phi_s = 0.11$)	$l_{\text{att}} = 4.0 \pm 0,3 \text{ mm}$	$l_{\text{att}} = 2.7 \pm 0,4 \text{ mm}$	$l_{\text{att}} = 2.4 \pm 0,4 \text{ mm}$

Plusieurs informations ressortent de ce tableau. Tout d'abord, l'échantillon bleu, plus dense, est le plus atténuant (valeurs de l_{att} plus faibles). D'autre part, les longueurs obtenues sont environ dix fois plus faibles que l'épaisseur d'échantillon traversé, ce qui signifie que le signal est atténué d'un facteur de l'ordre de $e^{10} \approx 22000$. C'est considérable, et cela explique la nécessité d'un pré-amplificateur pour les fréquences les plus élevées. Justement, la dernière information importante du tableau est que l'atténuation dépend de la fréquence. Elle est d'autant plus grande que la fréquence est élevée. Or, les signaux ont une largeur de bande de l'ordre de 100%, provenant de la bande passante des transducteurs (et renforcée par le filtre de Butterworth qui a été appliqué aux signaux). Ainsi, les valeurs données dans ce tableau sont en fait intégrées sur cette bande passante. Pour avoir l'atténuation des échantillons de façon plus précise en fonction de la fréquence, il faut travailler dans le domaine fréquentiel.

Atténuation en fonction de la fréquence - Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval traduit mathématiquement le fait que l'énergie totale du signal doit être la même dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Cela s'écrit

$$\int |\varphi(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |\tilde{\varphi}(f)|^2 df \quad (2.2.6)$$

Autrement dit, en passant dans le domaine fréquentiel, il est possible grâce à ce théorème, appliqué à la fois au signal moyenné et au signal référence dans l'eau, d'obtenir une valeur de la longueur caractéristique d'atténuation en fonction de la fréquence. Pour cela, dans la bande passante des transducteurs, les spectres des deux signaux sont découpés en fenêtres de largeur 0,1 MHz sur lesquelles l'énergie est intégrée. Appliqué aux trois séries de mesures et pour chacun des deux échantillons, cela donne les courbes de longueurs caractéristiques d'atténuation en fonction de la fréquence tracées sur la figure 2.5.

En théorie, les valeurs de l_{att} à une fréquence donnée devraient parfaitement se superposer d'une série de mesure à une autre. Dans les faits, les courbes ne se superposent pas toujours parfaitement. Cela peut être dû à des imprécisions expérimentales, mais également au rapport signal sur bruit qui est moins bon aux extrémités de la bande passante, et de fait rend la précision de la mesure plus faible. Malgré tout, l'accord est relativement bon entre les différentes séries de données. Comme les résultats précédents dans le domaine temporel le suggéraient, la longueur caractéristique d'atténuation diminue avec la fréquence, et est plus faible pour l'échantillon le plus dense (bleu). Grâce à ces données nous avons maintenant accès de façon beaucoup plus précise à la variation de cette longueur en fonction de la fréquence. Cela montre notamment qu'elle décroît beaucoup plus vite à basse fréquence qu'à plus haute fréquence. Des lois de puissance pourraient être envisagées pour rendre compte des différents régimes d'atténuation observés en fonction de la fréquence, mais le faible nombre de points sur lesquels elles seraient appliquées rendraient les valeurs obtenues peu fiables.

Pour conclure ces expériences en transmission, même si ces données fréquentielles sont plus précises que les précédentes, il reste encore une information manquante : quelle est la part de l'atténuation due à l'absorption et celle due à la diffusion ? Avec ces seules données il est impossible de trancher. Il faut donc des mesures complémentaires pour distinguer la contribution des deux

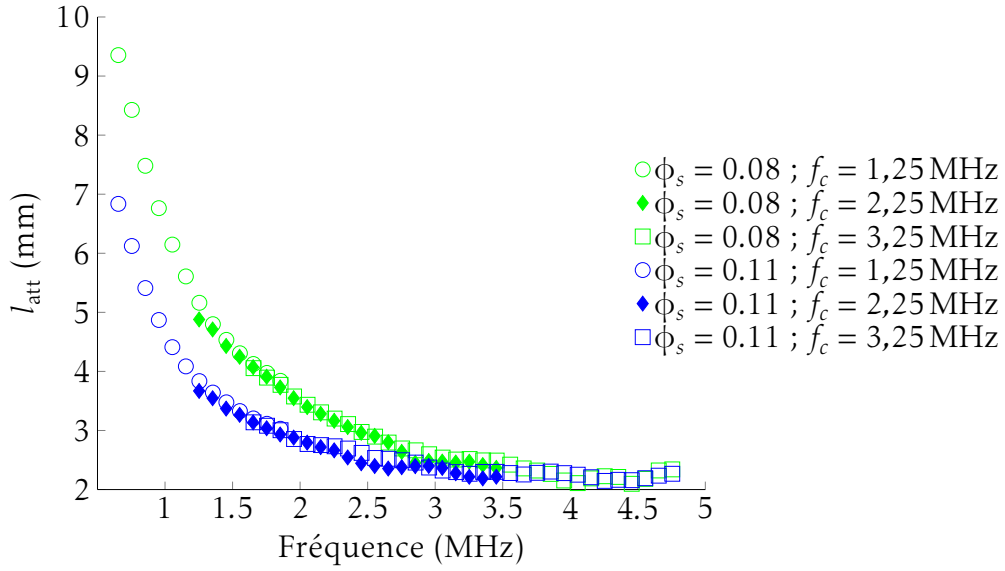


FIGURE 2.5. – Longueur caractéristique d'atténuation l_{att} en fonction de la fréquence, pour les mousses solides Sawbones jaune (fraction solide : 8%, courbes vertes) et bleue (fraction solide : 11%, courbes bleues). Trois jeux de données sont utilisés pour chaque échantillon, correspondant aux trois paires de capteurs de fréquences centrales 1,25 MHz, 2,25 MHz et 3,25 MHz.

phénomènes. C'est l'étude des signaux rétrodiffusés, que nous allons maintenant aborder, qui va nous permettre de pouvoir répondre à cette question.

2.2.3. Expériences en rétrodiffusion

Le pic de rétrodiffusion cohérente

Après les signaux transmis, nous nous intéressons maintenant aux signaux rétrodiffusés. Considérons une source S et un récepteur R. Le champ $\varphi^{(S,R)}$ reçu en R à partir de l'impulsion émise en S peut s'écrire

$$\varphi^{(S,R)}(t) = \sum_i A_i(t) \quad (2.2.7)$$

avec A_i l'onde (en notation complexe) ayant emprunté le chemin i . La figure 2.6 montre ainsi trois exemples de chemins p, q et r à travers l'échantillon diffusant, symbolisé par une collection de points. Deux cas de figure sont présentés. À gauche, (a), source et récepteur sont distincts et les trois chemins ont une longueur différente. À droite, (b), la source est confondue avec le récepteur. Cela a une conséquence directe : les chemins p et q , réciproques, sont maintenant strictement de même longueur.

L'intensité du signal émis par S et rétrodiffusé sur R s'écrit

$$\begin{aligned} I^{(S,R)}(t) &= |\varphi^{(S,R)}(t)|^2 = \left| \sum_i A_i(t) \right|^2 \\ &= \sum_i |A_i(t)|^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} A_i(t) A_j^*(t) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

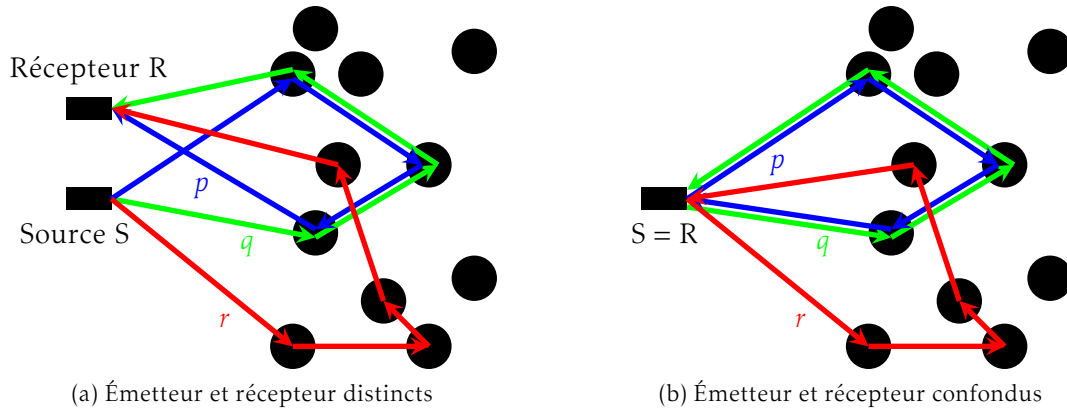


FIGURE 2.6. – Schématisation d'une expérience de rétrodiffusion. (a) Source et récepteur distincts. (b) Source et récepteur confondus.

Le premier terme est l'intensité dite incohérente, somme de l'intensité de tous les chemins (diffusion simple comme diffusion multiple), tandis que le deuxième est un terme d'interférences entre les différents chemins. Si l'on prend l'hypothèse que les chemins sont deux à deux décorrélés, la moyenne du terme d'interférence est nulle. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle I^{(S,R)}(t) \rangle &= \sum_i \langle |A_i(t)|^2 \rangle \\ &= \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle + \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

où DS et DM représentent respectivement les chemins de diffusion simple et multiple. Le caractère aléatoire de la répartition des diffuseurs laisse penser que ces chemins sont décorrélés. Il n'en est rien, car dans le cas particulier où source et récepteur sont confondus (figure 2.6(b)) les chemins p et q , bien que différents, sont réciroques, donc leurs contributions sont exactement en phase. D'une manière générale chaque chemin de diffusion multiple i_+ aura son chemin réciroque i_- avec lequel il va interférer constructivement. Pour un chemin de diffusion simple en revanche il n'existe pas de réciroque : il n'y a qu'un seul chemin qui fait l'aller-retour entre l'émetteur et un diffuseur donné.

Réécrivons l'intensité dans le cas où source et récepteur sont confondus :

$$\begin{aligned} I^{(S=R)}(t) &= \sum_i |A_i(t)|^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} A_i(t) A_j^*(t) \\ &= \sum_i |A_i(t)|^2 + \sum_i \sum_{j \text{ réciroque de } i} A_i(t) A_j^*(t) + \sum_i \sum_{j \text{ non réciroque de } i} A_i(t) A_j^*(t) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Le premier terme est l'intensité incohérente (même terme que précédemment), somme des intensités de tous les chemins, de diffusion simple comme de diffusion multiple. Le deuxième est l'intensité des chemins de diffusion multiple (interférence entre chemins réciroques). Le dernier

est un terme d'interférences croisées (appelé "speckle" en anglais) entre tous les chemins décorrélés, qui va disparaître à la moyenne. La moyenne de l'intensité vaut alors

$$\begin{aligned}
 \langle I^{(S=R)}(t) \rangle &= \sum_i \langle |A_i(t)|^2 \rangle + \sum_i \sum_{j \text{ réciproque de } i} \langle A_i(t) A_j^*(t) \rangle \\
 &= \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle + \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle + \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \\
 &= \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle + 2 \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Lors d'une expérience en rétrodiffusion, la première arrivée correspond à l'écho de surface de l'échantillon, et donc à un chemin de diffusion simple. Si la distance entre la source et l'échantillon est suffisamment grande devant la distance émetteur-récepteur, notée r ⁷, et si on néglige la directivité des transducteurs, l'intensité moyenne rétrodiffusée est la même que le récepteur soit confondu ou non avec la source et vaut

$$\langle I(t) \rangle \approx \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle \tag{2.2.12}$$

Pour des temps d'arrivée plus longs, les chemins ont subi plusieurs événements de diffusion. Le régime de diffusion multiple prend petit à petit le pas sur le régime de diffusion simple. Lorsqu'il devient majoritaire, les intensités moyenne deviennent

$$\langle I^{(S,R)}(t) \rangle = \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle + \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \approx \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \tag{2.2.13}$$

$$\langle I^{(S=R)}(t) \rangle = \sum_{DS} \langle |A_{DS}(t)|^2 \rangle + 2 \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \approx 2 \sum_{DM} \langle |A_{DM}(t)|^2 \rangle \tag{2.2.14}$$

Autrement dit, l'intensité moyenne est presque le double de celle rétrodiffusée sur un récepteur suffisamment éloigné de la source. L'intensité moyenne rétrodiffusée présente alors un maximum au voisinage de la source : on parle de pic de rétrodiffusion cohérente. Plus le régime de diffusion simple sera négligeable, plus ce pic sera distinct du "fond" diffus, ce qui permet une estimation du libre parcours moyen dans le milieu. Lorsque le rapport intensité loin de l'émetteur sur intensité au niveau de l'émetteur (centre) est égal à 1, correspondant à un temps t_1 d'arrivée des signaux, il s'agit essentiellement d'un régime de diffusion simple. Lorsque ce rapport atteint 1/2 (temps $t_{1/2}$), un régime où la diffusion multiple domine est atteint. Entre les deux, les deux régimes cohabitent. Ainsi, lorsque le rapport vaut 3/4 (temps $t_{3/4}$), les poids des diffusions simple et multiple sont sensiblement les mêmes. Le temps $t^* = t_{3/4} - t_1$ combiné à la vitesse de propagation dans l'échantillon $v_{\text{éch}}$ donne une estimation du libre parcours moyen [33] :

$$l_e \approx v_{\text{éch}} t^* \tag{2.2.15}$$

L'observation du pic est donc un test du caractère **multiplement diffusant** d'un échantillon. L'avantage de cette technique est qu'elle est **indépendante de l'absorption du milieu**. En effet, à un temps d'arrivée donné correspondent des chemins différents, mais de même longueur. Tous les chemins de même temps d'arrivée sont donc atténués de la même façon. Cette technique a permis de mettre en évidence l'existence de diffusion multiple dans l'os trabéculaire pour des fréquences de l'ordre de 3 MHz, avec un libre parcours moyen de l'ordre de 8 mm [33].

7. Comme l'intensité décroît en $1/r$, elle est peu affectée par une faible variation de r quand cette distance est grande.

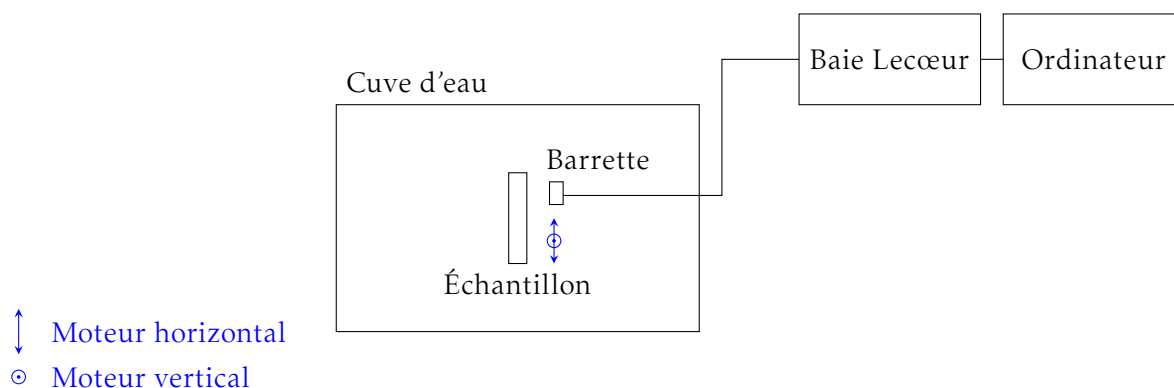


FIGURE 2.7. – Schéma du dispositif expérimental en rétrodiffusion.

Dispositif expérimental

Les expériences en rétrodiffusion ont été réalisées à l'aide de trois réseaux de 128 transducteurs (Imasonic), de fréquences centrales 1,5 MHz, 2,5 MHz et 4 MHz. La plage de fréquence étudiée sera donc sensiblement la même que pour les expériences en transmission. L'intérêt d'un réseau de transducteurs est d'utiliser un élément en tant que source, pour ensuite recevoir sur plusieurs éléments simultanément et ainsi avoir accès à l'intensité rétrodiffusée en fonction de la distance à l'émetteur. Néanmoins, un réseau de transducteurs a également un défaut : le couplage inter éléments. La gestion des éléments du réseau est assurée par une électronique multi-voies Lecœur, reliée à un ordinateur pour la gestion de l'émission et la réception des signaux. Cette électronique ne contenant que 64 canaux, seule la première moitié des réseaux sera utilisée.

Pour chaque expérience le réseau est monté sur un couple de moteurs, l'un horizontal, l'autre vertical, afin de balayer l'ensemble de l'échantillon. Cela permettra, ici encore, d'avoir un grand nombre de réalisations, pour ensuite obtenir l'intensité moyenne. La figure 2.7 reprend de façon schématique le dispositif expérimental. Pour chaque réalisation, c'est-à-dire pour chaque émission d'un élément, il a été choisi ici de prendre 31 récepteurs, correspondant à l'émetteur et ses quinze plus proches voisins de chaque côté. En conséquence, afin d'avoir au moins 15 éléments de chaque côté, seuls les éléments 16 à 49 sont tour à tour utilisés comme émetteurs. Lorsque le dernier émetteur (élément 49) est passé, la barrette est déplacée de telle sorte que l'élément 16 se retrouve à l'ancienne position de l'élément 50. Le même processus est alors répété jusqu'à avoir balayé toute la dimension horizontale de l'échantillon⁸. Cela revient à avoir une barrette fictive de la taille de l'échantillon. Lorsqu'une ligne est terminée, la barrette est descendue d'une distance égale à la demi-hauteur des éléments et ainsi de suite jusqu'à balayage complet de l'échantillon.

Tout comme pour l'expérience en transmission, le nombre de réalisations n'est pas le même pour les trois barrettes car la taille et l'espacement des éléments ne sont pas les mêmes. Néanmoins, il y a dans tous les cas plus de 2000 réalisations, ce qui est déjà significatif.

Traitement des données

Tous les signaux sont filtrés à l'aide d'un filtre de Butterworth, de la même façon qu'en transmission, avec une bande passante de 100%. Ils sont ensuite recalés temporellement pour corriger le fait que les échos mettent plus de temps à parcourir les plus longues distances émetteur-récepteur. L'étape suivante consiste alors à découper ces signaux en fenêtres glissantes (se recouvrant de moitié) de la taille du signal d'émission, soit deux périodes de sinusoïde, sur lesquelles le carré

8. En prenant là encore une marge pour éviter les effets de bord.

du signal est intégré pour obtenir l'intensité. C'est cette intensité qui est ensuite moyennée sur toutes les réalisations.

Nous avons vu que les éléments de la barrette n'avaient pas tous le même rôle au cours de l'expérience. Cela peut poser problème si la sensibilité, à l'émission comme à la réception, n'est pas la même pour tous les éléments. Aussi, pour corriger ce problème, une expérience supplémentaire a été menée. Elle consiste à remplacer l'échantillon poreux par une source parfaitement réfléchissante, dans notre cas un bloc d'acier inoxydable. Les signaux correspondant à l'ensemble des couples émetteur-récepteur sont enregistrés. L'intensité de ces signaux permet d'évaluer la sensibilité de chacun des couples, qui va alors pouvoir être utilisée pour renormaliser les données des expériences sur les échantillons poreux.

La figure 2.8 représente l'intensité moyenne rétrodiffusée pour les deux échantillons et pour les trois fréquences centrales, obtenue après les divers traitements détaillés précédemment. L'origine des temps est le début de l'impulsion émise par l'élément source. Les six diagrammes montrent un pic rétrodiffusion cohérente, synonyme de la présence de **diffusion multiple dans les deux échantillons, aux fréquences étudiées**. Pour autant, tous les pics n'ont pas la même allure. Il apparaît clairement qu'ils s'affinent beaucoup plus vite à plus haute fréquence, pour les deux échantillons. De plus, à fréquence donnée, ils s'affinent plus vite pour l'échantillon jaune (le moins dense) que pour le bleu. Ce raisonnement qualitatif indique déjà que le libre parcours moyen est plus petit pour l'échantillon bleu que pour le jaune, et qu'il diminue lorsque la fréquence augmente⁹.

Une analyse quantitative est également possible. Comme expliqué précédemment, le temps d'affinement du pic combiné à la vitesse dans l'échantillon donne une estimation du libre parcours moyen. Le tableau suivant répertorie ces estimations pour les deux échantillons, aux trois fréquences centrales étudiées :

	$f_c = 1,5 \text{ MHz}$	$f_c = 2,5 \text{ MHz}$	$f_c = 4 \text{ MHz}$
Échantillon jaune ($\phi_s = 0.08$)	$l_e \approx 30 \text{ mm}$	$l_e \approx 28 \text{ mm}$	$l_e \approx 25 \text{ mm}$
Échantillon bleu ($\phi_s = 0.11$)	$l_e \approx 30 \text{ mm}$	$l_e \approx 26 \text{ mm}$	$l_e \approx 23 \text{ mm}$

Les valeurs obtenues confirment les observations qualitatives précédentes. Mais surtout il est intéressant de les comparer aux longueurs caractéristiques d'atténuation calculées à partir des expériences en transmission. Le libre parcours moyen est environ 6 fois plus grand que la longueur caractéristique d'atténuation. Cela signifie que c'est essentiellement l'absorption qui est à l'origine de l'atténuation.

2.3. Conclusions sur les échantillons

L'aspect visuel des mousses Sawbones assez proche de la structure de l'os trabéculaire était prometteur. Néanmoins, seuls quelques échantillons de fractions solides différentes sont disponibles, ce qui donne une marge de manœuvre réduite pour étudier l'influence des paramètres qui caractérisent la structure osseuse. Ainsi, il n'est par exemple pas possible, avec les échantillons proposés à ce jour par le fabricant, de modéliser l'anisotropie de l'os trabéculaire, dont l'influence sur la propagation des ultrasons est pourtant reconnue. D'ailleurs, une seule onde longitudinale a été observée dans ces échantillons.

Les mesures en transmission et en rétrodiffusion ont permis d'évaluer l'atténuation dans ces mousses et la part de la diffusion et de l'absorption dans cette atténuation. Les résultats montrent

9. Au passage, pour les temps les plus long, le profil de l'intensité finit par redevenir plat. Deux raisons sont possibles, cela le moment auquel cela apparaît. Soit il s'agit de l'écho de fond de l'échantillon (diffusion simple), soit le signal est devenu trop faible pour sortir du bruit.

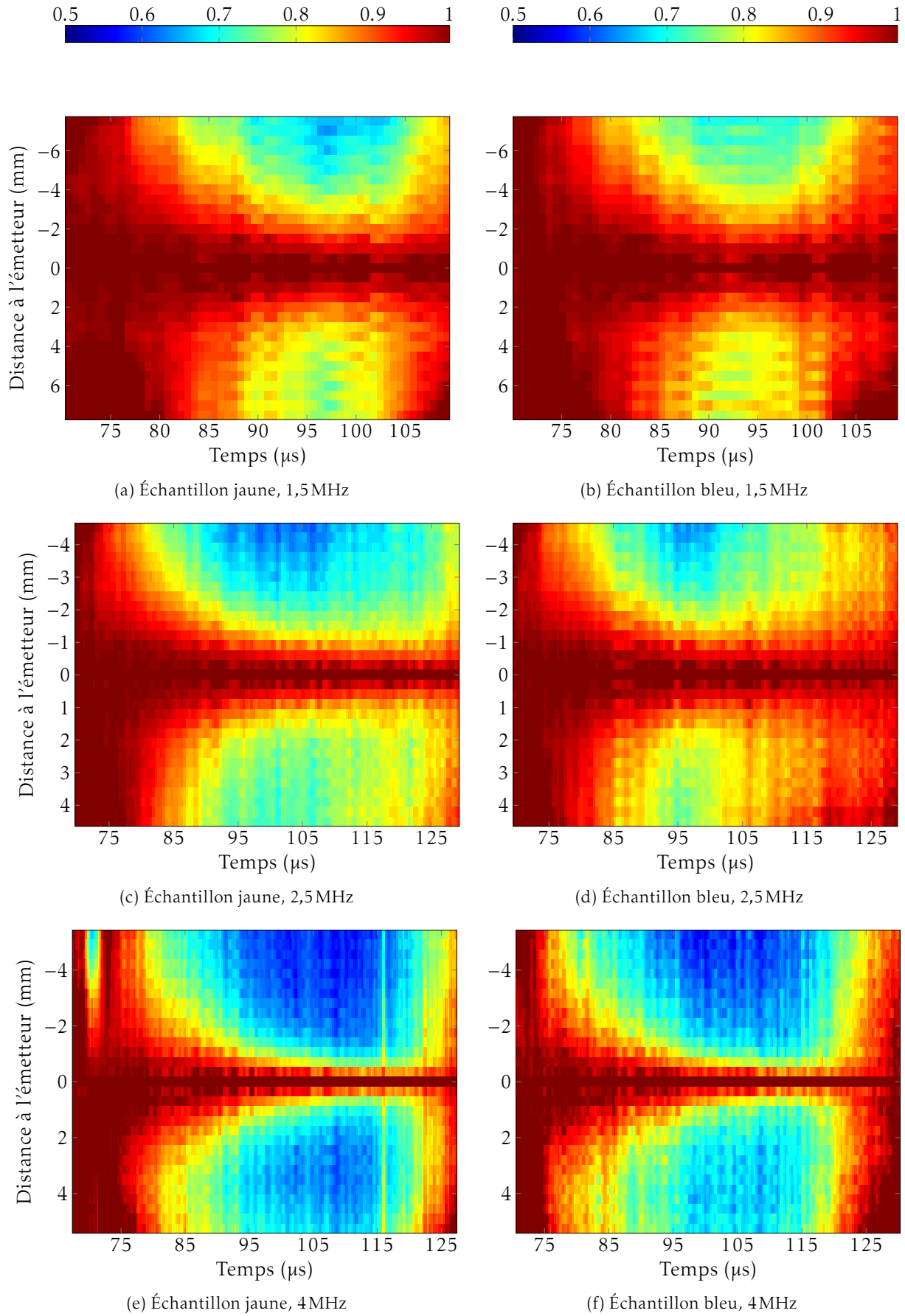


FIGURE 2.8. – Intensité moyenne rétrodiffusée par les échantillons jaune (à gauche) et bleu (à droite). Les colonnes de chaque image sont normalisées par la valeur centrale (lorsque le récepteur est l'élément qui a émis). Ligne du haut : fréquence centrale 1,5 MHz. Ligne du milieu : fréquence centrale 2,5 MHz. Ligne du bas : fréquence centrale 4 MHz.

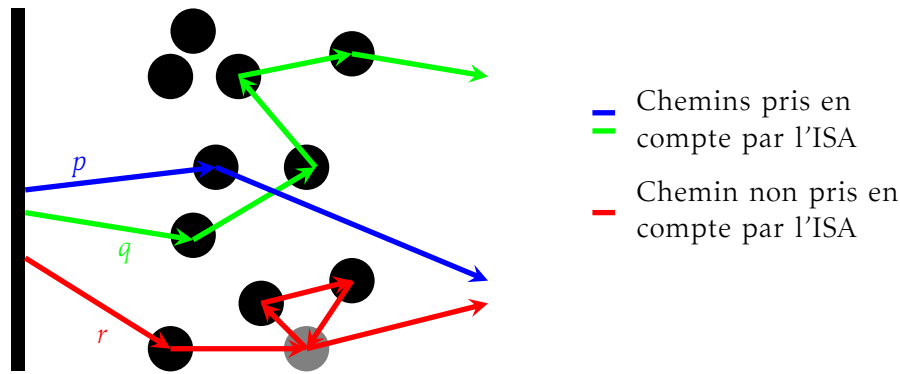


FIGURE 2.9. – Schématisation de différents types de chemins à travers un milieu diffusant. Le chemin p , en bleu, de diffusion simple (un seul diffuseur rencontré), et le chemin q , en vert, de diffusion multiple (plusieurs diffuseurs) sont tous deux pris en compte par l'ISA. Il s'agit donc bien d'une théorie de diffusion multiple. En revanche, le chemin r , en rouge, n'est pas pris en compte par cette théorie, car il passe deux fois par le diffuseur gris.

que l'atténuation est importante dans ces échantillons, et qu'elle est essentiellement due à l'absorption plutôt qu'à la diffusion. Nous avons vu dans le chapitre précédent que la théorie de Biot ne prédisait pas correctement l'atténuation dans l'os, l'une des hypothèses étant que c'est parce qu'elle néglige la diffusion. Avoir des échantillons plus absorbants que diffusants n'est donc pas idéal pour pouvoir étudier cette possibilité. La forte atténuation observée dans ces mousses est très certainement liée aux propriétés intrinsèques du matériau de la phase solide, lui-même très atténuant. Ce type de matériau est d'ailleurs hors du cadre de la théorie de Biot, pour laquelle le solide est non absorbant.

2.4. L'Independent Scattering Approximation

Soit une onde se propageant dans un milieu constitué d'hétérogénéités solides dans un fluide (de vecteur d'onde k_0). Comme évoqué précédemment, le champ cohérent à l'intérieur d'un tel milieu diffusant est solution de l'équation de Dyson [31]. Cette équation fait intervenir ce que l'on appelle la self-energy, contenant tous les termes de diffusion multiple : c'est l'approche diagrammatique. La self-energy peut être écrite comme un développement perturbatif de termes en $1/(k_0 l_e)$ [34]. L'approximation la plus simple consiste alors à ne garder que le terme de premier ordre de ce développement. Cette hypothèse est connue sous le nom **d'Independent Scattering Approximation (ISA)**.

Pour un milieu pouvant être décrit comme une collection de diffuseurs identiques dans le fluide, les hypothèses associées à l'ISA se traduisent physiquement de la façon suivante [32] :

- les positions des diffuseurs sont indépendantes
- un chemin à l'intérieur du milieu ne passe jamais deux fois par le même diffuseur

D'un point de vue pratique, ces hypothèses limitent ainsi l'utilisation de **l'ISA a des milieux fortement dilués**. La densité de diffuseurs ne doit typiquement pas dépasser quelques pourcents, faute de quoi les corrélations entre les positions des diffuseurs doivent être prises en compte [32]. C'est peut-être la raison pour laquelle l'ISA est parfois considérée, à tort, comme une théorie de diffusion simple. Pourtant, même si elle suppose de fortes approximations, il s'agit bien d'une théorie de diffusion multiple. La figure 2.9 montre ainsi quelques exemples de chemins de diffusion pris en compte ou non par cette théorie.

Sous ces hypothèses, on peut alors montrer que la self-energy ne dépend que du nombre n de diffuseurs par unité de volume (ou unité de surface à deux dimensions) dans le milieu et des propriétés de diffusion d'un diffuseur individuel¹⁰. L'équation de Dyson peut donc être résolue de manière analytique, ce qui donne accès à une équation de dispersion $k_{\text{eff}}(\omega)$, k_{eff} étant le vecteur d'onde, potentiellement complexe, de l'onde cohérente. En d'autres termes, pour l'onde cohérente, tout se passe comme si elle se propageait dans un milieu homogène dont la vitesse et l'atténuation sont déterminées par les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde. Cette façon d'envisager la propagation revient à assimiler le milieu à un milieu effectif. Elle n'a de sens bien sûr que pour l'onde cohérente. Ce raisonnement se rapproche donc d'une stratégie d'homogénéisation, à ceci près que c'est l'onde qui est moyennée, et non les paramètres caractéristiques du milieu, pour définir un milieu effectif équivalent.

L'équation de dispersion s'écrit

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + 4\pi n f(0, 0) \quad (2.4.1)$$

$f(\theta, \phi)$ étant la fonction de forme associée au diffuseur en fonction des angles θ et ϕ par rapport à la direction d'incidence $\theta = 0$ et $\phi = 0$. Cette fonction est reliée au champ φ_s diffusé en champ lointain par le diffuseur selon la relation :

$$\varphi_s(\theta, \phi, r) = \frac{e^{ik_0 r}}{r} f(\theta, \phi) \quad \text{à trois dimensions} \quad (2.4.2)$$

$$\varphi_s(\theta, r) = \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} f(\theta) \quad \text{à deux dimensions} \quad (2.4.3)$$

Ainsi, la fonction de forme est indépendante de la distance d'observation r , contrairement au champ diffusé φ_s .

Même si l'ISA s'apparente à une stratégie d'homogénéisation, la grande différence par rapport aux théories des milieux poreux est qu'elle prend en compte le caractère diffusant du milieu. Ainsi elle s'applique à des fréquences auxquelles les théories de milieux poreux ne peuvent théoriquement plus s'appliquer. D'autre part, le nombre d'onde effectif étant dépendant de la fréquence, cela prend en compte la dispersion qui peut intervenir dans un milieu qui n'est pas homogène. En revanche, la modification du vecteur d'onde permet certes de prédire une atténuation alors que le fluide est à l'origine parfait, mais ne pourra jamais prédire deux ondes longitudinales comme observé dans l'os. C'est donc une approche simpliste qui ne peut complètement expliquer la propagation des ultrasons dans l'os. Elle reste malgré tout intéressante dans le cas de la propagation d'une seule onde, quand la direction d'incidence est perpendiculaire aux travées.

2.5. Conclusion

L'approche diagrammatique de la diffusion multiple, qui aboutit à l'équation de Dyson pour le champ moyen, propose un formalisme différent des théories de propagation en milieux poreux. À travers les expériences en transmission et en rétrodiffusion menées sur les mousses solides Sawbones, nous avons pu introduire ce formalisme et les techniques associées. En particulier, l'étude de l'intensité moyenne rétrodiffusée permet d'estimer le libre parcours moyen, longueur caractéristique d'atténuation par diffusion. Il s'agit d'une expérience révélatrice du caractère multiplement diffusant d'un échantillon, permettant de savoir quelles hypothèses peuvent être utilisées pour décrire le milieu. Au passage, les résultats obtenus pour les mousses Sawbones montrent que leur utilisation en tant qu'échantillons modèles pour la propagation des ultrasons dans l'os

10. Avant l'introduction de l'approche diagrammatique de la diffusion multiple, ce résultat approché avait déjà été obtenu par Foldy [35].

poreux n'est pas très satisfaisante. Pour cette raison, une autre piste sera proposée et étudiée dans le dernier chapitre avec l'impression 3D (§5.2).

Les théories d'ondes en milieux complexes les plus complètes pourraient *a priori* parfaitement décrire la propagation ultrasonore dans l'os trabéculaire. Toutefois, à l'image de la théorie de Biot, complète mais dont les paramètres d'entrée ne sont pas tous facilement mesurables, les théories de diffusion multiple nécessitent des hypothèses simplificatrices pour pouvoir être appliquées en pratique. Ainsi, l'Independent Scattering Approximation est relativement simple, mais ne suffit pas à décrire tous les aspects de la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire du fait de certaines hypothèses trop restrictives. Elle ne prévoit par exemple pas la propagation des deux ondes longitudinales. En revanche, elle est susceptible de prévoir une atténuation par diffusion qui pourrait correspondre à ce qui est observé dans l'os. Il est à noter que dans le cadre de théories de diffusion multiple moins restrictives, il est possible d'expliquer la propagation de deux ondes longitudinales [36]. La nature physique de ces deux ondes n'est cependant pas forcément la même que dans le cas de l'os trabéculaire.

Après avoir vu les deux grands types de théories pouvant s'appliquer à l'os trabéculaire, il convient maintenant de mieux comprendre quels sont les paramètres d'influence sur la propagation des ultrasons. La structure complexe de l'os rend cela particulièrement délicat. Aussi il peut être avantageux d'avoir un modèle simplifié de l'os poreux. C'est l'objet du chapitre 4. Juste avant cela, le chapitre suivant, qui constitue une sorte d'aparté dans cette thèse, traite d'une problématique liée à l'ISA. Nous avons vu en effet que l'application de l'ISA nécessitait la connaissance de la diffusion vers l'avant du diffuseur élémentaire. Ce chapitre sera l'occasion de s'intéresser aux méthodes de calcul du comportement diffusant d'objets à deux dimensions, en dehors du cas élémentaire du diffuseur circulaire.

DIFFUSION PAR UN CYLINDRE À SECTION ELLIPTIQUE DE GRAND RAPPORT D'ASPECT

Nous avons vu précédemment que pour appliquer une théorie de diffusion multiple comme l'ISA, il faut connaître le comportement diffusant des objets qui constituent le milieu. Il y a plusieurs façons d'obtenir cette information. Une méthode qui convient quel que soit le diffuseur est d'utiliser une approche purement numérique de résolution de l'équation d'onde, type SimSonic. C'est l'option qui est choisie dans le chapitre suivant (§4.3). Néanmoins, selon le type de diffuseur (2D ou 3D, rigide ou élastique, de forme simple ou complexe), il existe des solutions analytiques ou semi-analytiques pour obtenir le champ diffusé par l'objet en question. Au cours de ce chapitre, nous nous intéresserons spécifiquement à la diffusion par un cylindre (de génératrice infinie) de section elliptique et plongé dans un fluide. Cela revient à considérer un problème dans le plan. Aussi par la suite il pourra être fait mention de disque ou d'ellipse pour désigner un cylindre à section circulaire ou elliptique.

Pourquoi un tel chapitre ? Il existe déjà en effet dans la littérature de nombreux articles qui traitent, *a priori* avec succès, de la diffusion par des disques ou des ellipses. En réalité, il n'est pas rare même de voir des études qui prétendent pouvoir calculer la diffusion par un diffuseur de forme quelconque. Cependant, en y regardant de plus près, nous verrons que les exemples concernant les ellipses ne traitent en général que le cas de faibles rapports d'aspect (rapport grand axe sur petit axe), typiquement de l'ordre de 2, donc relativement proches du disque. Or, dans les milieux étudiés au chapitre 4, le rapport d'aspect est de 7 (demi-grand axe : $a = 0,35$ mm ; demi-petit axe : $b = 0,05$ mm), ce qui s'éloigne significativement du disque. Il apparaît alors des problèmes d'ordre numérique, qui ne sont que très peu abordés dans la littérature [37–39], mais qui rendent particulièrement difficile en pratique le calcul de la diffusion par ce type d'ellipses.

Après la mise en évidence du problème, nous verrons des pistes pour y remédier, grâce au pré-conditionnement de matrice et au calcul en précision arbitraire. Pour cela nous nous attarderons tout d'abord sur le cas des diffuseurs rigides. La résolution de ce cas, bien que plus simple, est déjà sujette à ce type de problème numérique. C'est donc une étape préalable intéressante pour appréhender les problèmes liés à la forme du diffuseur, tout en s'affranchissant de ceux qui seraient éventuellement associés à sa nature élastique. Nous verrons alors dans un deuxième temps ce qu'il en est pour les diffuseurs élastiques.

La problématique de ce chapitre, bien qu'étant directement dans la lignée de celle du chapitre 2, constitue donc un sujet à part. En ce sens tout ce qui va être abordé ici peut donc être lu de façon totalement *indépendante des autres chapitres*.

3.1. Techniques de calcul du champ diffusé

3.1.1. Champ diffusé par un cylindre à section circulaire

Avant de s'intéresser à la diffusion par des ellipses, il peut être utile de s'arrêter brièvement au cas des disques. La pression diffusée par un cylindre élastique à section circulaire immergé dans un fluide est en fait un cas relativement simple à traiter. Il est notamment parfaitement décrit par Faran [40], qui utilise une décomposition modale sur une base d'harmoniques cylindriques. L'onde plane incidente de pression p_{inc} et l'onde diffusée p_s s'écrivent alors ¹ :

$$p_{\text{inc}}(r, \theta, t) = p_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} = p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_0 r) e^{in\theta} \quad (3.1.1)$$

$$p_s(r, \theta, t) = p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta} \quad (3.1.2)$$

où ω est la pulsation et $k_0 = \omega/c_0$ le nombre d'onde dans le fluide, avec c_0 la célérité des ondes dans le fluide environnant. J_n et $H_n^{(1)}$ sont les fonctions de Bessel et de Hankel de première espèce. Cette dernière n'est rien d'autre qu'une combinaison des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce : $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$. Les inconnues de ce problème sont les coefficients modaux A_n , qui sont calculés en explicitant les conditions de continuité des champs de déplacement normal et de contraintes au niveau de la frontière du diffuseur. Ces coefficients dépendent uniquement des propriétés du diffuseur (rayon a , vitesses longitudinale c_L et transverse c_T , masse volumique ρ_s) et du fluide environnant (célérité c_0 et masse volumique ρ_f).

La relative simplicité du cas du diffuseur circulaire repose sur le fait que dans la base polaire, particulièrement adaptée au disque, les harmoniques cylindriques sont des **modes normaux, et donc découplés les uns des autres**. Concrètement, chaque coefficient A_n peut être calculé indépendamment des autres par une **expression analytique**. Ceci n'est plus vrai dans le cas de l'ellipse, comme nous allons le voir juste après. Il reste une dernière étape pour un calcul numérique : déterminer l'ordre N à partir duquel la somme sera tronquée. Il est en effet impossible d'écrire numériquement une somme infinie, donc le résultat sera nécessairement approché par une série finie. L'ordre de troncature N dépendra de la précision recherchée pour l'estimation du champ diffusé. La référence [41] étudie cet aspect et donne une estimation pour N qui est de l'ordre de $k_0 a$. D'une manière générale il peut être intéressant de consulter cette référence qui étudie de façon détaillée les diffuseurs circulaires. On y trouve notamment l'expression analytique des coefficients modaux A_n .

3.1.2. Champ diffusé par un cylindre à section elliptique

Les choses ne sont pas aussi simples dans le cas de l'ellipse. De ce fait diverses techniques coexistent dans la littérature, chacune avec ses avantages mais aussi ses inconvénients, qui empêchent tantôt de traiter certaines formes de diffuseurs (longues ellipses), tantôt certains types de diffuseurs (élastiques).

1. Compte-tenu de la symétrie du problème, il est également possible et fréquent d'écrire ces sommes de 0 à $+\infty$. Par exemple la pression incidente peut également s'écrire :

$$p_{\text{inc}}(r, \theta, t) = p_0 e^{-i\omega t} \left(J_0(k_0 r) + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k_0 r) \cos(n\theta) \right)$$

Cette écriture est notamment utilisée dans les références [40] et [41]. Ce n'est pas le choix qui a été fait ici car dans le cas des ellipses, traité par la suite, cette symétrie peut être amenée à être brisée selon l'angle d'incidence.

Coordonnées elliptiques - fonctions de Mathieu

En coordonnées polaires, la frontière d'un disque est simplement décrite par $r = a$. Il n'y a donc pas de dépendance en θ , l'autre coordonnée polaire, ce qui simplifie considérablement la résolution des conditions limites. Sur ce même principe, il est possible d'étudier les cylindres elliptiques dans une base de coordonnées elliptiques (μ, ν) ² adaptée à cette géométrie. Dans cette base, la somme modale qui décrit la pression n'est plus composée de fonctions de Fourier-Bessel $J_n(k_0 r)e^{in\theta}$, mais de fonctions de Mathieu [42, 43], et la frontière de l'ellipse correspond simplement à une courbe μ constant. Dans le cas d'un diffuseur elliptique rigide [42] ou fluide [43], les modes sont alors normaux, ce qui fait de cette technique un choix particulièrement intéressant. En revanche, dans le cas du diffuseur elliptique élastique, l'orthogonalité des modes n'est plus garantie du fait de l'existence des vitesses longitudinale et transverse dont dépendent les fonctions de Mathieu [44, 45]. Cette approche a donc un **intérêt très limité pour étudier la diffusion par une ellipse élastique**, les calculs étant particulièrement lourds. Nous ne nous attarderons donc pas plus sur cette technique ici.

Transformations conformes

Nous avons vu que décrire de façon simple la frontière du diffuseur était un point critique. Pour cela l'idée des techniques de transformation conforme est d'introduire un nouveau système de coordonnées dans lequel la frontière du diffuseur sera transformée en un cercle. Les composantes normales et tangentielles, qui interviennent dans les conditions aux limites, sont en effet dans ce cas plus simples à écrire. Si nous traitons ici de cylindres elliptiques, cette technique est en réalité valable pour des cylindres de n'importe quelle section ou presque³, ce qui est un atout non négligeable. On s'adapte ainsi à la forme du diffuseur, mais ses modes ne sont pas pour autant orthogonaux. Nous le verrons par la suite, cela nécessite alors l'inversion d'une matrice qui rend les calculs potentiellement instables. DiPerna et Stanton [37] avec la Fourier Matching Method (FMM) sont les premiers à appliquer cette technique pour la diffusion par des cylindres à sections de diverses formes. Ils ont observé une meilleure stabilité numérique que d'autres techniques, mais se limitent au cas du diffuseur rigide ou fluide. Plus récemment, Liu et al. [46] ont développé une technique similaire, bornée au cas des diffuseurs rigides. Il est précisé dans ces deux articles que la méthode peut être étendue au cas du diffuseur élastique. Néanmoins, le fait qu'une telle technique n'ait pas vu le jour plus de 20 ans après le premier article consacré aux diffuseurs rigides et fluides laisse supposer une **grande complexité de mise au point pour des diffuseurs élastiques**. Enfin, un article récent [47] remet en cause le gain apporté par l'approche transformation conforme vis-à-vis des autres techniques comme la matrice T, que nous allons voir maintenant.

Résolution du système en polaire - matrice T et dérivées

La dernière approche consiste finalement à résoudre les conditions aux limites en polaire, même si ces coordonnées ne sont pas les plus adaptées à la forme du diffuseur. D'un point de vue mathématique rien n'empêche de se placer en coordonnées polaires quelle que soit la forme du diffuseur, dès lors que sa frontière peut être décrite par une expression analytique $a(\theta)$. Néanmoins, si le

2. Les coordonnées cartésiennes (x, y) et elliptiques (μ, ν) sont reliées par :

$$\begin{cases} x = \alpha \cosh \mu \cos \nu \\ y = \alpha \sinh \mu \sin \nu \end{cases}$$

où α sera la demi-distance entre les deux foyers de l'ellipse décrite par $\mu = cte$.

3. La seule contrainte est que la fonction de transformation respecte certains critères, notamment être bijective, ce qui élimine quelques formes de diffuseur.

diffuseur n'est pas circulaire, **les modes ne sont plus normaux et ne peuvent plus être écrits de façon analytique**. Une résolution semi-analytique du système issu des conditions de continuité est cependant possible par l'inversion d'une matrice. Le premier à utiliser cette technique est Waterman [48] à la fin des années 1960, pour des ondes purement acoustiques. Il nomme alors T la matrice qui relie le champ diffusé au champ incident, ce qui est à l'origine du nom souvent donné à cette technique. Plus tard Pillai *et al.* [49] appliqueront cette méthode à des ellipses rigide et élastique (aluminium) dans l'eau, de rapport d'aspect 2. Récemment, Léon *et al.* [50] ont développé une approche similaire qui a l'avantage d'être plus simple à appréhender et à transcrire numériquement. Ils ont validé leur approche en étudiant la diffusion par une ellipse d'aluminium de rapport d'aspect 4/3. Enfin dans la même idée, Ancey *et al.* [51] ont observé la levée de dégénérescence provoquée par le passage d'un cylindre circulaire à un cylindre elliptique en utilisant les groupes de symétrie. Les cylindres étudiés ont alors un rapport d'aspect compris entre 1 et 2. Il n'est pas question dans ces trois derniers articles de potentiels problèmes numériques, ce qui se conçoit étant donnés les rapports d'aspect en jeu. En fait, **l'inversion de la matrice devient de plus en plus instable numériquement à mesure que la forme du diffuseur s'éloigne de celle d'un disque**. Ce qui correspond, dans le cas des ellipses, à un rapport d'aspect qui devient trop grand, typiquement au-delà de 4. Des améliorations ont bien été apportées dans le cas de diffuseurs rigides, en exploitant les symétries du système [52] ou en utilisant une méthode itérative [38], mais cette instabilité reste un point bloquant, d'autant plus important dans le cas de l'ellipse élastique. Entretemps cependant, l'informatique et les techniques numériques se sont largement perfectionnées. Le but est donc ici de voir s'il est possible de surpasser ces problèmes numériques grâce aux outils actuels, et si oui, à quel prix.

3.2. Approche modale en coordonnées polaires

3.2.1. Principe

Cette partie reprend les grandes lignes de l'approche modale de Léon *et al.* [50] pour l'étude d'un diffuseur élastique dans un fluide. Nous nous intéressons cependant au cas plus restreint d'une forme elliptique. La figure 3.1 reprend la géométrie du problème et les principaux paramètres. Comme nous l'avons vu pour le cas du disque, l'onde plane incidente p_{inc} et l'onde diffusée p_s dans le fluide environnant peuvent être écrites sous forme de sommes modales. Il en est de même à l'intérieur du diffuseur. Soit $\vec{u} = -\text{grad}\phi + \text{rot}(\psi\vec{u}_z)$ le déplacement à l'intérieur du diffuseur, les potentiels scalaire ϕ et vecteur ψ peuvent également être décomposés en somme modale sur une base d'harmoniques cylindriques. Ce qui donne les expressions suivantes⁴ :

$$p_{\text{inc}}(r, \theta, t) = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(k_0 r) e^{in\theta} \quad (3.2.1)$$

$$p_s(r, \theta, t) = e^{-i\omega t} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} a_n A_n(N) H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta} \quad (3.2.2)$$

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\rho_s \omega^2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} a_n A_n^L(N) J_n(k_L r) e^{in\theta} \quad (3.2.3)$$

$$\psi(r, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{i\rho_s \omega^2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} a_n A_n^T(N) J_n(k_T r) e^{in\theta} \quad (3.2.4)$$

4. Pour simplifier l'onde incidente est supposée d'amplitude unité.

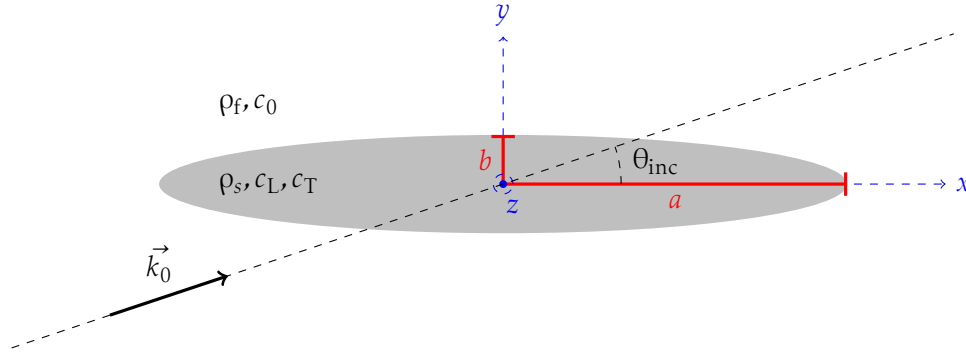


FIGURE 3.1. – Géométrie du problème

$k_L = \omega/c_L$ et $k_T = \omega/c_T$ sont les nombres d'onde associés respectivement aux ondes longitudinale et transverse dans le diffuseur. Les coefficients $A_n(N)$, $A_n^L(N)$ et $A_n^T(N)$ sont les coefficients inconnus, réels, représentant le poids de chacun des modes. À ce stade il apparaît deux différences par rapport au cas du disque (§3.1.1). Tout d'abord le coefficient $a_n = i^n e^{-in\theta_{\text{inc}}}$ tient dorénavant compte de l'angle d'incidence θ_{inc} par rapport au diffuseur (figure 3.1). Ensuite pour être rigoureuse l'écriture des équations (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4) fait apparaître des limites⁵. En effet les coefficients modaux sont maintenant dépendants les uns des autres et dépendent donc de l'ordre N à laquelle la somme sera nécessairement tronquée pour une résolution numérique. Pour alléger l'écriture, la dépendance en N de ces coefficients ne sera cependant pas reprise par la suite.

Les inconnues sont ensuite déterminées par les conditions de continuité des champs de déplacement normal (Eq. (3.2.5)) et de contrainte (Eqs. (3.2.6) et (3.2.7)) sur le contour $a(\theta)$ du diffuseur :

$$u_r n_r + u_\theta n_\theta = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \left[\frac{\partial(p_{\text{inc}} + p_s)}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(p_{\text{inc}} + p_s)}{\partial \theta} n_\theta \right] \quad (3.2.5)$$

$$\sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\theta} n_\theta = -(p_{\text{inc}} + p_s) n_r \quad (3.2.6)$$

$$\sigma_{r\theta} n_r + \sigma_{\theta\theta} n_\theta = -(p_{\text{inc}} + p_s) n_\theta \quad (3.2.7)$$

où σ est le tenseur des contraintes à l'intérieur du diffuseur. Dans le cas d'une ellipse de demi grand axe a et demi petit axe b (fig. 3.1) , la frontière s'écrit :

$$a(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.2.8)$$

Les expressions du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes sont données en annexe C. Le développement en sommes modales des conditions limites conduit alors aux équations (15), (16) et (17) de la référence [50]. Dans le cas général, ce système d'équation ne peut être résolu de façon simple car les coefficients des sommes dépendent de θ ⁶. Cependant, ces coefficients sont des fonctions 2π -périodiques de θ . Ils sont donc décomposables en séries de Fourier, ce qui permet d'obtenir les équations (20), (21) et (22) de la référence [50]. Sous cette forme, les coefficients devant $e^{ip\theta}$ sont cette fois-ci indépendants de θ . L'identification terme à terme est maintenant possible⁷ et conduit à un système matriciel à valeurs complexes $Ax = B$. Les coefficients de la

5. L'écriture diffère un peu des sommes infinies des équations (6), (8) et (9) de la référence [50] qui ne sont pas parfaitement rigoureuses, mais cela n'a pas d'incidence sur la technique elle-même.

6. Dans le cas particulier du disque en revanche il n'y a pas cette dépendance angulaire. C'est ce qui permet de résoudre directement le système mode à mode.

7. Le produit scalaire de chaque membre par $e^{iq\theta}$ ne laissera que le terme $p = q$ ce qui permet d'identifier terme à terme.

matrice A et du vecteur B sont connus et donnés en annexe C.2. Le vecteur x est composé des coefficients inconnus A_n , A_n^L et A_n^T que l'on cherche à déterminer. La taille de chacun des termes de ce système matriciel dépend de l'ordre auquel chacune des deux sommes a été tronquée. En général le choix le plus simple consiste à tronquer les deux sommes au même ordre. Il y a de ce fait autant d'équations que d'inconnues et la matrice A est carrée. Il *suffit* alors de l'inverser pour obtenir les coefficients recherchés et remonter en particulier à la pression diffusée.

3.2.2. Exemple introductif

Nous allons ici nous intéresser à la diffusion par des ellipses d'os dans l'eau. Les paramètres mécaniques des deux phases sont ceux utilisés dans les autres chapitres et décrits dans l'annexe A.1.2. Deux formes d'ellipses sont testées. La première avec un faible rapport d'aspect ($a/b = 2$), identique à celui de Pillai *et al.* [49]. La deuxième avec un grand rapport d'aspect ($a/b = 7$) correspondant aux ellipses de notre modèle (chapitre 4).

Faible rapport d'aspect : $a/b = 2$	Grand rapport d'aspect : $a/b = 7$
$a = 0,10 \text{ mm}$	$a = 0,35 \text{ mm}$
$b = 0,05 \text{ mm}$	$b = 0,05 \text{ mm}$

Pour simplifier le problème, et parce que cela correspond à la problématique posée dans le chapitre suivant, nous ne traiterons que le cas d'un angle d'incidence nul : $\theta_{\text{inc}} = 0$.

Dans chaque cas le champ calculé par l'approche modale est comparé avec celui obtenu en utilisant SimSonic. La méthode pour obtenir ce champ avec SimSonic est détaillée en annexe A.4.1 et A.4.2. Que faut-il attendre de cette comparaison ? SimSonic est une méthode générale de résolution numérique de l'équation de propagation des ondes élastiques, utilisée dans le cas particulier d'un diffuseur unique. L'avantage, c'est que contrairement à l'approche modale, cette dernière n'est que peu dépendante de la forme et la taille du diffuseur. C'est donc un bon moyen de se convaincre que l'allure du champ calculé par l'approche modale est correcte. Pour autant, comme discuté plus en détail dans l'annexe A.4.2, **ce n'est pas une méthode exacte**, notamment à cause de la pixellisation du diffuseur. Il faut donc garder en mémoire que le champ calculé avec SimSonic constitue une référence pratique, mais pas exacte. C'est d'ailleurs une raison pour s'intéresser de près aux approches semi-analytiques.

La figure 3.2 représente le module du champ diffusé à 1 MHz et 10 mm du centre pour chacun des deux diffuseurs, calculé selon les deux méthodes. Pour l'approche modale, la pression diffusée a été estimée dans les deux cas à partir d'une somme tronquée à l'ordre $N = 6$. Si dans le cas de l'ellipse de faible rapport d'aspect (fig. 3.2(a)) cela semble suffire pour avoir un résultat proche de la solution SimSonic, dans le cas de l'ellipse longue en revanche (fig. 3.2(b)), la différence entre les deux est flagrante. C'est finalement assez logique. Si les deux diffuseurs sont relativement petits par rapport à la longueur d'onde dans l'eau ($\lambda = 1,5 \text{ mm}$), le deuxième est malgré tout un peu plus grand. C'est donc compréhensible qu'il faille plus de modes pour décrire son comportement diffusant. Malheureusement l'ordre $N = 6$ est la plus grande valeur qui permet d'inverser la matrice A . Au delà cette matrice carrée de taille $3(2N + 1)$ n'est plus inversible numériquement car elle est mal conditionnée, notion sur laquelle nous allons revenir dans le paragraphe suivant. Selon la routine d'inversion utilisée, le programme peut soit retourner une erreur et s'arrêter, ce qui était le cas ici, soit renvoyer un message d'avertissement et donner malgré tout un résultat potentiellement erroné (cas du calcul d'inversion dans Matlab par exemple). Ce premier exemple simple illustre donc déjà les problèmes numériques qui peuvent apparaître lors de l'utilisation de l'approche modale.

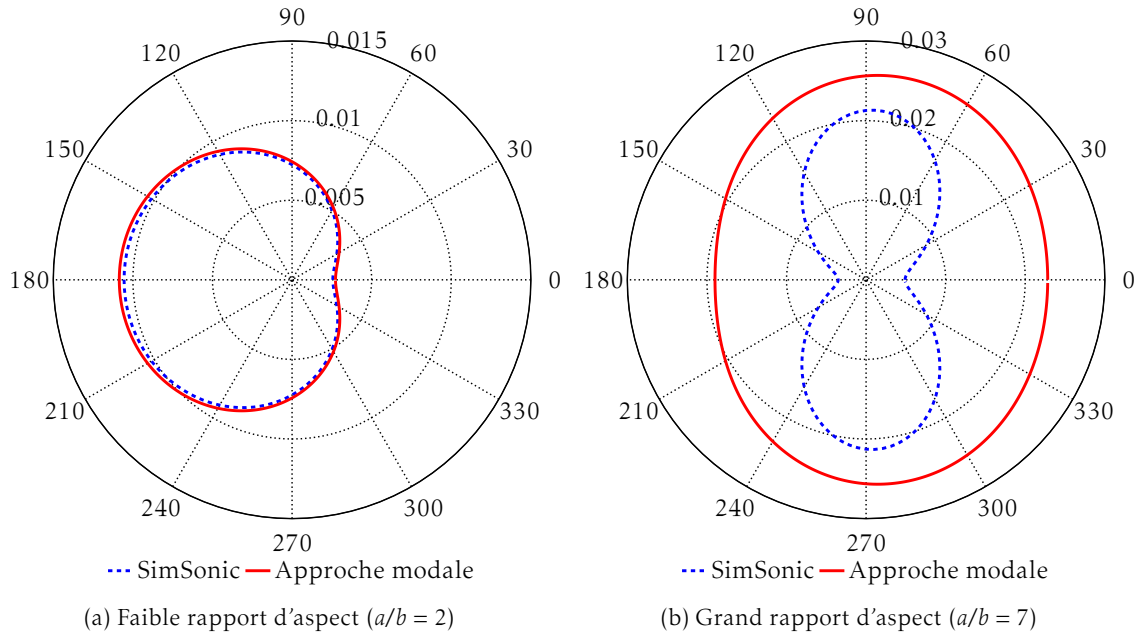


FIGURE 3.2. – Diagrammes de rayonnement (modules de la pression diffusée à 10mm du centre du diffuseur) à 1 MHz, obtenus avec SimSonic (bleu, pointillé) et l'approche modale pour une série tronquée à $N = 6$ (rouge). (a) Ellipse de faible rapport d'aspect ($a/b = 2$). (b) Ellipse de grand rapport d'aspect ($a/b = 7$).

3.2.3. Conditionnement des matrices & fonctions de Bessel

Il est important de distinguer l'inversibilité d'une matrice au sens mathématique du terme et l'inversibilité numérique. D'un point de vue mathématique, une matrice carrée complexe est inversible si et seulement si toutes ses valeurs propres sont non nulles. D'un point de vue numérique cette condition n'est pas suffisante. Pour juger de la stabilité numérique de l'inversion d'une matrice, on définit un indicateur appelé conditionnement. Une faible valeur du conditionnement signifie que la matrice peut être inversée numériquement sans problème. Un conditionnement élevé peut conduire à des erreurs importantes sur le résultat final⁸. La valeur du conditionnement varie selon la norme utilisée. Dans le cas de la norme euclidienne canonique, il est tout simplement égal au rapport de la plus grande valeur propre en module sur la plus petite. Une grande valeur de conditionnement exprime donc un écart considérable sur les ordres de grandeur des coefficients de la matrice. En fonction de la précision avec laquelle les calculs sont menés, les plus faibles valeurs peuvent alors apparaître comme des "zéros numériques". Par exemple, en précision de calcul *double* standard, $1 + 10^{-16} = 1$. Donc si le conditionnement est plus grand que 10^{16} , la valeur propre la plus petite risque d'apparaître comme nulle et la matrice comme singulière. Nous aurons par la suite l'occasion de revenir sur ces considérations de précision numérique (§3.3.2).

Pour comprendre ce qui rend la matrice A si mal conditionnée, intéressons-nous un peu plus en détail aux coefficients qui la constituent (donnés en annexe C.2). Il s'agit de transformées de Fourier, donc d'intégrales sur l'angle θ , faisant intervenir des fonctions de Bessel J_n et de Hankel $H_n^{(1)}$ de première espèce. Ces dernières peuvent encore se décomposer en intégrales de fonctions de Bessel de première et deuxième espèce J_n et Y_n . Les arguments que prennent ces fonctions sont

8. À noter que certains logiciels comme Matlab utilisent au contraire un paramètre qui s'apparente à l'inverse du conditionnement tel qu'il est défini ici. À une matrice mal conditionnée correspond une valeur proche de 0. Pour une matrice bien conditionnée, cette valeur est proche de 1.

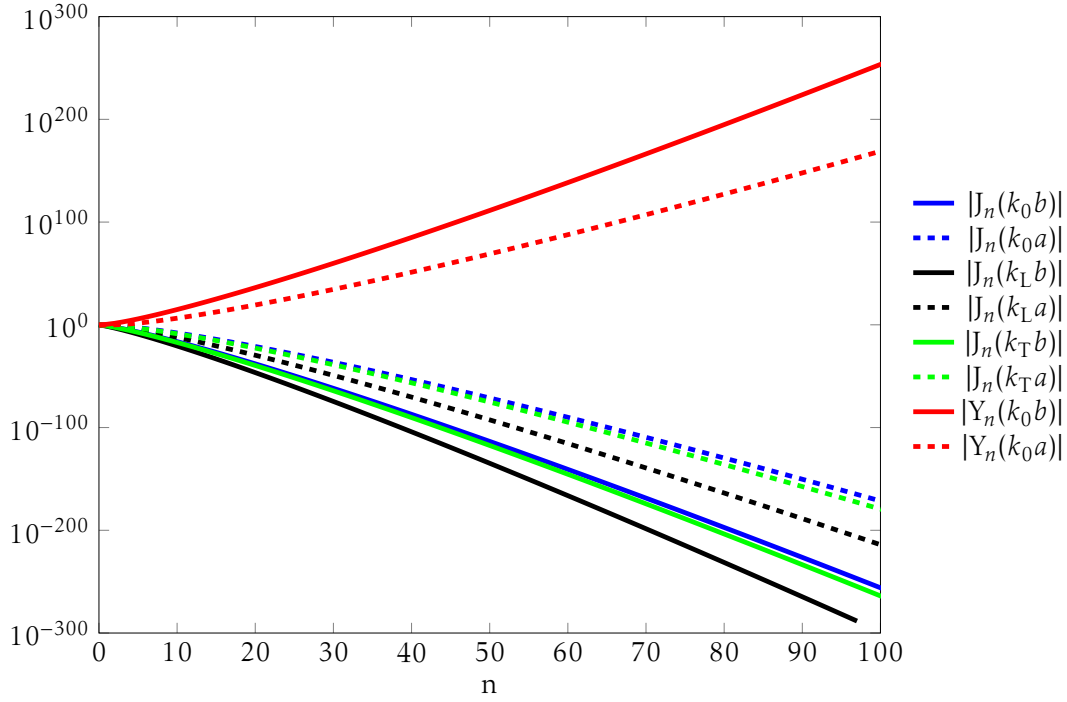


FIGURE 3.3. – Fonctions de Bessel de première (J_n) et deuxième espèce (Y_n) en fonction de l'ordre n , pour les valeurs d'arguments caractéristiques de l'ellipse longue : $a = 0,35$ mm et $b = 0,05$ mm. La fonction Y_n n'intervenant que dans le fluide (à travers la fonction de Hankel), seuls interviennent les arguments de nombre d'onde k_0 . À noter que l'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

de la forme $ka(\theta)$ ⁹, où $a(\theta)$, qui décrit le contour de l'ellipse, prend toutes les valeurs comprises entre b et a . La figure 3.3 représente la valeur absolue des fonctions J_n et Y_n en fonction de l'ordre n , pour les valeurs extrêmes des arguments, soit kb et ka , dans le cas de l'ellipse de grand rapport d'aspect. Chaque couleur est associée à un couple fonction (J_n ou Y_n) - nombre d'onde (k_0 , k_L ou k_T). Les traits pleins correspondent à la plus petite valeur de l'argument (pour $a(\theta) = b$), les pointillés à la plus grande valeur ($a(\theta) = a$). Chaque fonction va donc prendre toutes les valeurs comprises entre les deux courbes de sa couleur lorsque $a(\theta)$ va décrire le contour de l'ellipse.

L'échelle logarithmique utilisée en ordonnée donne le ton : les fonctions ont des comportements exponentiels en fonction de l'ordre n . Si on avait adopté une échelle linéaire, les courbes seraient indiscernables, seule la valeur la plus grande $|Y_{100}(k_0 b)|$ s'en détacherait. C'est finalement une bonne image de ce qui se passe pour la matrice A , où la grande dynamique des valeurs en fait apparaître certaines comme nulles. La matrice s'en trouve fortement modifiée et a de fortes chances de conduire à un résultat erroné ou d'être non inversible, comme c'est le cas dès $N = 7$ dans l'exemple précédent.

L'autre enseignement de la figure 3.3 est que la tendance au mauvais conditionnement est d'autant plus vraie que l'objet est petit. Les courbes les plus extrêmes correspondent en effet à $a(\theta) = b$ (traits pleins). Attention le calcul de la diffusion par les petits objets n'est pas pour autant plus compliqué car dans le même temps il peut ne nécessiter que peu de modes. C'est en effet bien illustré par l'exemple précédent, où l'ellipse de faible rapport d'aspect est correctement traitée avec peu de modes.

9. k peut valoir k_0 , k_L ou k_T pour la fonction J_n , et seulement k_0 pour la fonction Y_n .

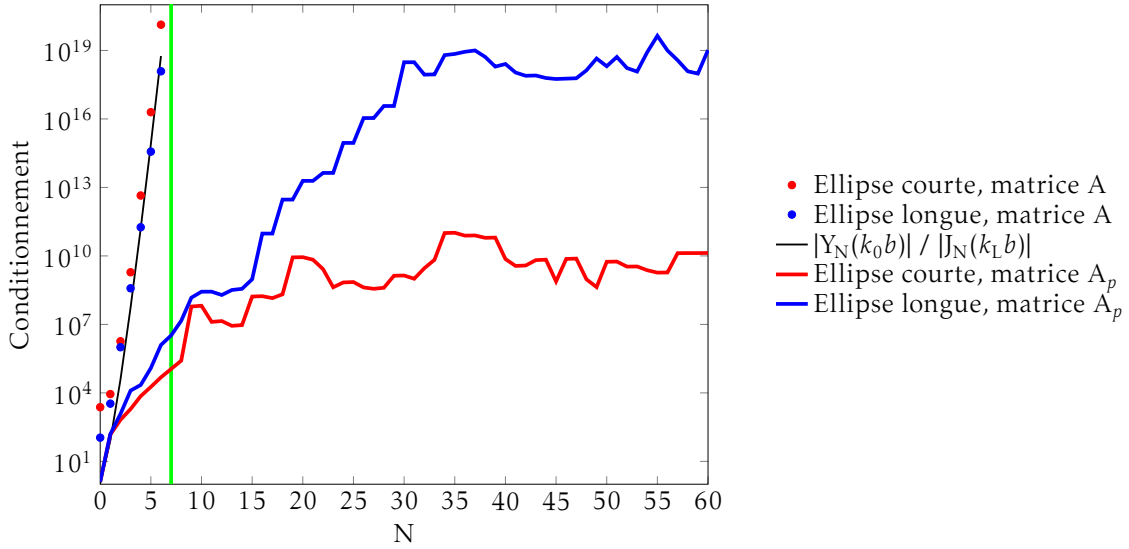


FIGURE 3.4. – Conditionnement des matrices en fonction de l'ordre N de troncature pour l'ellipse courte ($a = 0,10$ mm, $b = 0,05$ mm) en rouge, et l'ellipse longue ($a = 0,35$ mm, $b = 0,05$ mm) en bleu. Points : matrice A (sans préconditionnement). Traits pleins : matrice A_p (avec renormalisation des colonnes). Trait noir : rapport entre $|Y_N(k_0 b)|$ et $|J_N(k_L b)|$, valeurs extrêmes des fonctions de Bessel dans la matrice A (fig. 3.3). Trait vert : limite d'inversibilité de la matrice A . Échelle logarithmique en ordonnée.

3.2.4. Première tentative d'amélioration : préconditionnement des matrices

Pour résoudre des systèmes dont la matrice est au départ singulière, il existe des techniques dites de préconditionnement. L'idée est de modifier le système pour que la nouvelle matrice à inverser soit mieux conditionnée que A . Par exemple, multiplié par une matrice P , le système de départ devient $P A x = P B$, et donc $x = (P A)^{-1} P B$. Il suffit alors de choisir la matrice P de telle sorte que la nouvelle matrice à inverser $P A$, appelée A_p par la suite, soit mieux conditionnée. Dans cette optique nous prendrons une matrice A_p obtenue par renormalisation de chacune des colonnes de la matrice A par son maximum en module. La figure 3.4 montre le conditionnement des matrices A et A_p pour l'ellipse courte et l'ellipse longue étudiées en 3.2.2. Plusieurs enseignements sont à tirer de cette figure. Tout d'abord il est clair que, pour les deux ellipses, la matrice A_p renormalisée est mieux conditionnée que la matrice A de départ. Il est donc *a priori* possible d'étudier des ordres plus élevés que sans cette renormalisation où l'ordre maximum est $N = 6$.

Les courbes de conditionnement de la matrice A (sans renormalisation) donnent deux informations intéressantes. Premièrement, il apparaît que ce conditionnement est plus grand pour l'ellipse courte (points rouges) que pour l'ellipse longue (points bleus). Ceci se comprend avec la figure 3.3 qui montrait que les fonctions de Bessel divergeaient d'autant plus que l'objet était petit. Deuxièmement, après une phase transitoire pour les tous premiers points, le conditionnement semble varier de façon exponentielle comme le rapport des valeurs extrêmes des fonctions de Bessel (courbe noire fig. 3.4). Cela corrobore l'hypothèse que le conditionnement de la matrice est essentiellement dicté par ces fonctions de Bessel.

Pour ce qui est du conditionnement des matrices A_p , renormalisées, l'interprétation est plus délicate. Par exemple, il est intéressant d'observer que le conditionnement de la matrice renormalisée est cette fois plus grand pour l'ellipse longue (trait bleu). Les deux courbes sont très chahutées et ne semblent pas particulièrement suivre une tendance simple comme celles sans préconditionnement.

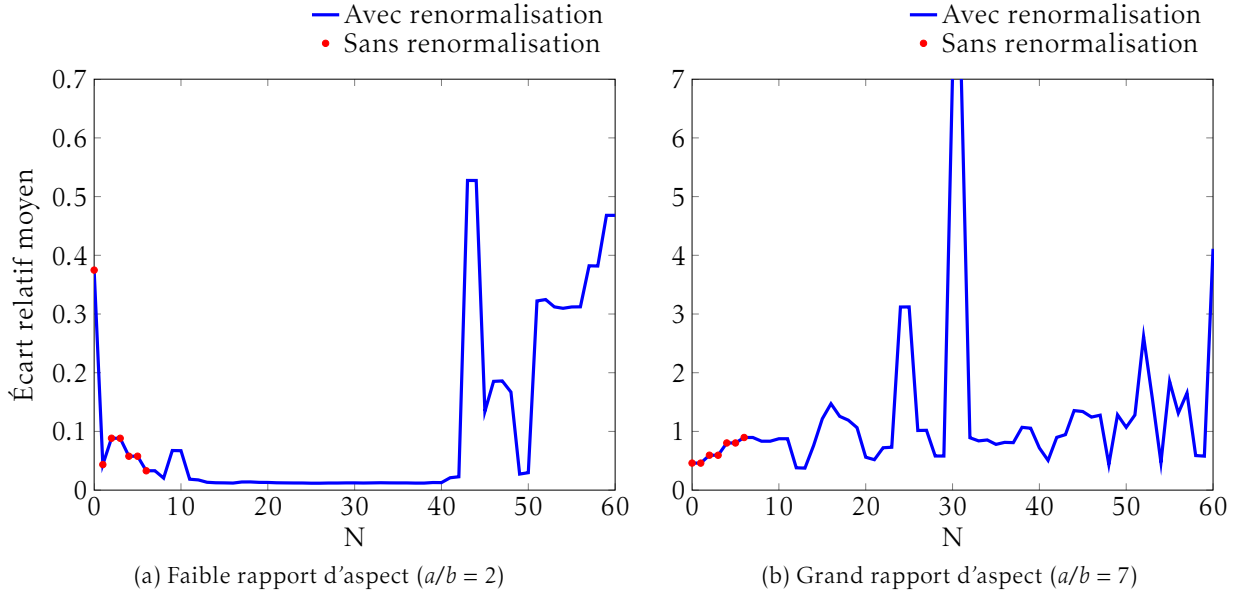


FIGURE 3.5. – Évolution de l'écart relatif moyen $\bar{\Delta}$ à 1 MHz en fonction de l'ordre N de troncature, pour l'ellipse courte (3.5(a)) et l'ellipse longue (3.5(b)). Trait bleu : avec renormalisation (inversion de la matrice A_p). Points rouges : sans renormalisation (inversion de la matrice A). L'échelle des ordonnées est dix fois plus petite à gauche qu'à droite.

Forts de la renormalisation, nous pouvons donc calculer un plus grand nombre de modes pour chacune des deux ellipses. Introduisons alors un calcul d'écart relatif moyen entre les champs calculés par l'approche modale et par SimSonic :

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{n=0}^{359} |p_s^{\text{mod}}(\theta_n) - p_s^{\text{num}}(\theta_n)|}{\sum_{m=0}^{359} |p_s^{\text{num}}(\theta_m)|} \quad \text{avec} \quad \theta_n = \frac{n\pi}{180} \quad (3.2.9)$$

p_s^{mod} est la pression diffusée calculée par la méthode modale et p_s^{num} celle obtenue à l'aide de SimSonic, selon la méthode décrite en annexe A.4.1. Attention, **il ne s'agit pas d'un calcul d'erreur** comme dans l'annexe A.4.2 puisque la solution donnée par SimSonic ne constitue pas une référence exacte. L'idée est seulement de s'assurer que le champ obtenu par l'approche modale est suffisamment proche de la méthode SimSonic pour considérer que le calcul n'a pas été perturbé par des instabilités numériques.

La figure 3.5 montre l'évolution de l'écart relatif moyen $\bar{\Delta}$ à 1 MHz en fonction de l'ordre N de troncature, pour l'ellipse courte (3.5(a)) et l'ellipse longue (3.5(b)). Pour l'ellipse courte (3.5(a)) l'écart relatif moyen converge relativement vite, à partir de $N = 15$, vers 1% d'erreur environ, soit l'erreur estimée pour le champ issu de SimSonic (§A.4.2). Cela laisse penser que la convergence vers la solution exacte est atteinte. Pour $N = 6$, ordre maximum sans préconditionnement, l'écart est plutôt proche de 3%. Il n'y a d'ailleurs aucune différence entre les résultats obtenus avec et sans préconditionnement lorsque le calcul est possible (points rouges superposés au trait bleu). L'apport du préconditionnement est donc indéniable pour améliorer la précision du calcul du champ diffusé à travers la prise en compte d'un nombre plus grand de modes.

Pour autant il y a un revers à la médaille. À partir de $N = 40$ environ, l'écart augmente puis explose jusqu'à plus de 50%. C'est la signature d'une instabilité numérique. Pouvaient-on le prévoir ? Oui et non. À partir de $N = 7$, nous savons que la matrice A n'est plus inversible. Elle contient trop d'erreurs, de zéros numériques, pour être inversible. Pour obtenir la matrice préconditionnée A_p , cette même matrice A contenant des erreurs est renormalisée. Cela atténue visiblement

l'impact de ces erreurs, mais elles sont toujours présentes et s'accumulent au fur et à mesure que N augmente. Il n'est donc pas illogique qu'à un certain moment la matrice contiennent trop d'erreurs pour retourner la solution attendue. En revanche il est difficile de prévoir que cela allait se produire à partir de $N = 40$ particulièrement.

Pour l'ellipse longue (3.5(b)), le comportement est tout autre. L'écart avec la solution SimSonic est au mieux d'environ 40%, ce qui n'est pas satisfaisant. Surtout, il ne se dessine aucune convergence, contrairement au cas de l'ellipse courte. Cela suggère que les instabilités numériques prennent très vite le pas. Le préconditionnement utilisé ici n'est donc pas la solution dans ce cas. Il est très probable qu'il existe de meilleures méthodes de préconditionnement qu'une simple re-normalisation des colonnes. Pour autant le problème dans ce cas semble différent, lié aux erreurs sur la matrice de départ. Pour tenter de limiter ces erreurs une approche possible consiste à **augmenter la précision des calculs**. Nous le verrons, la conséquence directe est une augmentation significative du temps de calcul. Aussi dans un premier temps cette approche a été appliquée à des diffuseurs rigides, pour lesquels le calcul est plus simple à mettre en œuvre et plus rapide.

3.3. Étude de diffuseurs elliptiques rigides

3.3.1. Principe

Dans le cas d'un diffuseur rigide, la condition à la frontière de l'objet se résume simplement à la nullité de la composante normale du déplacement dans le fluide, soit $(\vec{u}_{\text{inc}} + \vec{u}_s) \cdot \vec{n} = 0$. Or pression et déplacement dans le fluide environnant sont reliés par l'équation d'Euler, qui s'écrit en régime monochromatique :

$$\rho_f \frac{\partial(\vec{v}_{\text{inc}} + \vec{v}_s)}{\partial t} = -\rho_f \omega^2 (\vec{u}_{\text{inc}} + \vec{u}_s) = -\text{grad}(p_{\text{inc}} + p_s) \quad (3.3.1)$$

La condition de continuité s'exprime alors en termes de pression :

$$\frac{1}{\rho_f \omega^2} \left[\frac{\partial(p_{\text{inc}} + p_s)}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(p_{\text{inc}} + p_s)}{\partial \theta} n_\theta \right] = 0 \quad (3.3.2)$$

Comparativement au cas élastique traité en 3.2.1, la résolution se simplifie considérablement. La matrice A se résume simplement à la matrice $A^{(s)}$ et le vecteur second membre à a_{inc} , dont les expressions sont données en annexe C.2. L'étude de ce premier cas restreint est donc très intéressant. D'un côté le problème est considérablement simplifié. De l'autre il conserve malgré tout la source identifiée comme problématique précédemment : les fonctions de Hankel (et à travers elles les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce), présentes dans la matrice $A^{(s)}$ ¹⁰. En revanche toute difficulté supplémentaire liée à la nature élastique du diffuseur est ici écartée dans un premier temps.

3.3.2. Calcul en précision arbitraire

Nous avons déjà évoqué au paragraphe 3.2.3 la question des zéros numériques. Les valeurs considérées nulles numériquement dépendent de la précision de calcul utilisée, c'est-à-dire du nombre de bits sur lesquels est codé un nombre. Dans le cas de la précision *double* standard, les chiffres sont codés sur 64 bits. Seuls 53 de ces 64 chiffres servent cependant à coder les chiffres significatifs du nombre (le reste servant à coder le signe et la puissance du nombre). La dynamique

10. Un retour sur la figure 3.3 montre que le conditionnement devrait cependant être légèrement meilleur car il n'y a plus de fonctions $J_n(k_L a(\theta))$. Les valeurs les plus petites sont désormais obtenues avec les fonctions $J_n(k_0 a(\theta))$.

des nombres qui peuvent être correctement décrits est donc de 2^{53} , soit plus de 10^{15} valeurs possibles¹¹. Dans la majorité des cas cette dynamique est largement suffisante. En revanche, nous avons vu ici que les coefficients pouvaient prendre des valeurs qui sortaient largement de cette dynamique. La précision standard n'est donc plus suffisante pour décrire correctement le problème. Pour lever cette limite, il faut augmenter la précision. Il existe pour cela des bibliothèques de calcul en précision arbitraire¹². Usuellement celle-ci est indiquée par un nombre de décimales plutôt que par un nombre de bits, moins parlant. Ainsi un nombre *double* standard est certes codé sur 64 bits, mais il offre en fait une précision de 15 décimales. Les précisions seront par la suite exprimées en nombre de décimales.

La contrepartie de l'augmentation de la précision, c'est l'augmentation du temps de calcul. C'est particulièrement vrai pour les calculs d'intégrales dont les algorithmes¹³ itératifs convergent d'autant plus lentement que la précision recherchée est importante. Tous les résultats qui suivent, réalisés à différentes précisions, ont été obtenus en collaboration avec Didier Cassereau, du Laboratoire d'Imagerie Biomédicale (Université Pierre et Marie Curie).

3.3.3. Ellipse longue rigide

Nous allons directement nous intéresser à une ellipse de rapport d'aspect $a/b = 7$ (mêmes dimensions qu'en 3.2.2). Comme dans le cas du diffuseur élastique, les résultats peuvent être comparés avec ceux obtenus en utilisant SimSonic. L'exemple du disque rigide traité en annexe A.4.2 montre cependant que l'approche SimSonic est moins précise pour un diffuseur rigide. Mais dans le cas du diffuseur rigide, une autre technique est disponible dans la littérature : les transformations conformes. Pour cela nous nous fonderons sur le formalisme développé par Liu *et al.* [46]. Cela nous permettra d'évaluer l'intérêt de cette approche dans le cas d'une ellipse longue, donc particulièrement sujette aux problèmes numériques. Il y a en effet une contradiction dans la littérature sur ce point. Certains considèrent qu'elle est plus stable numériquement [37] quand d'autres pensent qu'elle se heurte aux mêmes problèmes que les techniques classiques [47].

La figure 3.6 montre l'écart relatif moyen par rapport à la solution SimSonic, pour l'approche modale classique (3.6(a)) et l'approche transformation conforme (3.6(b)). Trois précisions sont considérées : la précision standard (15 décimales), et deux précisions plus élevées, 50 et 100 décimales. Le calcul a même été porté jusqu'à une précision de 300 décimales avec les transformations conformes. Pour les deux approches l'apport de l'augmentation de précision est évident. La précision de 100 décimales offre la possibilité de calculer plus de modes que celle de 50 décimales, qui elle-même permet d'en calculer plus qu'à la précision standard. À l'instar du diffuseur élastique précédent (fig. 3.5(a)), pour chaque précision, lorsque N devient trop grand les instabilités numériques apparaissent et l'écart à SimSonic augmente, voire explose selon les cas¹⁴. L'apparition des instabilités est cependant repoussée par l'utilisation d'une plus grande précision.

La comparaison des deux méthodes est l'autre enseignement majeur de cette figure 3.6. À nombre de décimales donné, les deux méthodes permettent d'atteindre sensiblement le même écart à la solution SimSonic. Mais la convergence est beaucoup plus rapide pour l'approche transformation conforme que pour l'approche polaire classique. À chaque précision l'ordre N pour

11. Cela explique que $1 + 10^{-16} = 1$ en précision standard, puisque la dynamique de valeurs proposée n'est pas assez grande pour englober 1 et 10^{-16} .

12. Citons par exemple *mpmath* (<http://mpmath.org/>) pour le langage Python ou *ARPREC* (<http://crd-legacy.lbl.gov/dhbailey/mpdist/>) pour le langage C++.

13. La méthode que nous utilisons ici est la quadrature *tanh-sinh* (plus d'informations dans les manuels d'utilisation des deux bibliothèques citées précédemment).

14. L'échelle de la figure 3.6(a) ne permet pas réellement de l'observer mais à 100 décimales l'écart finit également par augmenter à partir de 276 modes.

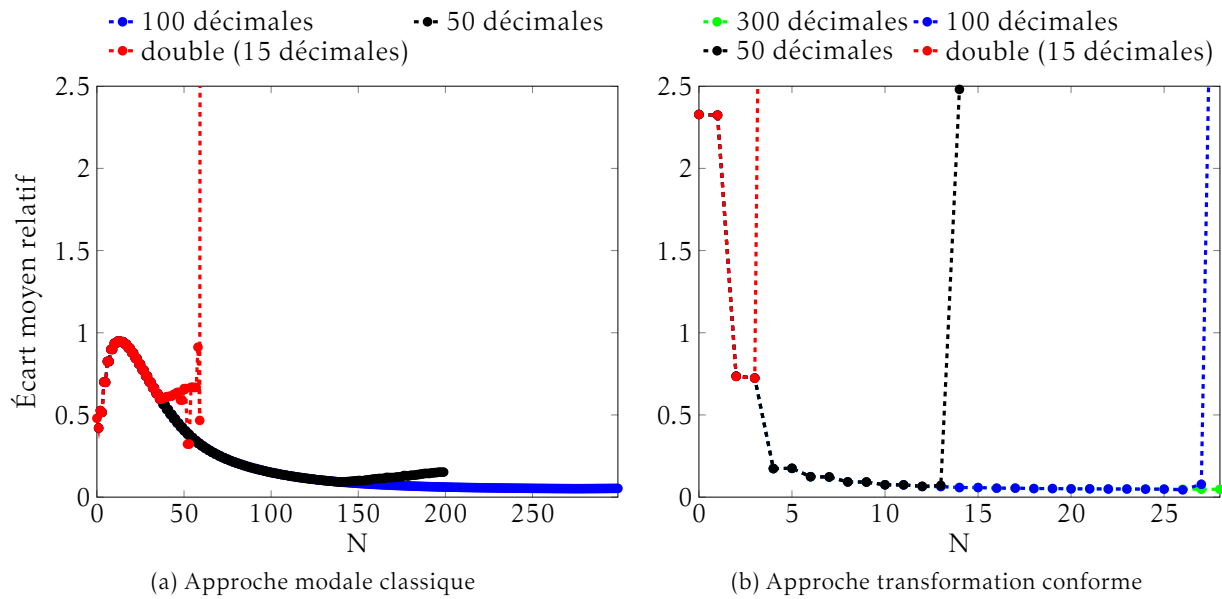


FIGURE 3.6. – Ellipse rigide de rapport d'aspect $a/b = 7$. Écart moyen relatif à la solution SimSonic pour l'approche modale classique (a) et l'approche transformation conforme (b). En rouge, calcul en précision standard (15 décimales). En noir, calcul à une précision de 50 décimales. En bleu, calcul à une précision de 100 décimales. L'approche transformation conforme a également été menée à la précision de 300 décimales (vert). Elle converge jusqu'à $N = 75$ (la fin de la courbe n'est pas montrée ici).

lequel l'écart minimum est atteint est approximativement **10 fois plus petit pour avec les transformations conformes qu'avec l'approche classique**. C'est considérable, et particulièrement intéressant car il y a un paramètre essentiel à prendre en compte : le temps de calcul.

Dans les deux approches le nombre de coefficients à calculer à un ordre N donné est le même. Il y a dans les deux cas $(2N + 1)^2$ coefficients dans la matrice A et $2N + 1$ dans le vecteur B , soit un total de $(2N + 1)(2N + 2)$ calculs à effectuer. En première approximation le temps de calcul total augmente donc, comme le nombre de coefficients, de façon quadratique par rapport à N . Le temps de calcul d'un coefficient est sensiblement le même avec les deux méthodes, ce qui est relativement logique car les fonctions mises en jeu dans les intégrales sont du même type, à base de fonctions de Hankel. Le tableau ci-dessous fournit un ordre de grandeur du temps de calcul d'un coefficient¹⁵, en langage Python et en langage C++¹⁶, en fonction de la précision utilisée :

	15 décimales	50 décimales	100 décimales	300 décimales
Python	3 s	10 s	48 s	6200 s
C++	×	9 s	20 s	163 s

Plus que les valeurs, qui dépendent de nombreux paramètres (matériel informatique, méthode de parallélisation des calculs), c'est l'évolution en fonction de la précision de calcul qui est intéressante. Avec le code Python, il faut 16 fois plus de temps pour calculer un coefficient à une précision de 100 décimales qu'à la précision standard de 15 décimales, et plus de 2000 fois plus de temps à 300 décimales. Le coût est donc colossal. Avec le code C++, langage compilé donc plus optimisé, ce temps est fortement réduit, surtout pour des calculs à grand nombre de décimales, mais

15. Temps moyen déterminé d'après le calcul de près de 9000 coefficients.

16. La bibliothèque ARPREC utilisée pour le code C++ n'est pas conçue pour le calcul en précision standard. Il n'y a donc pas de valeur à 15 décimales.

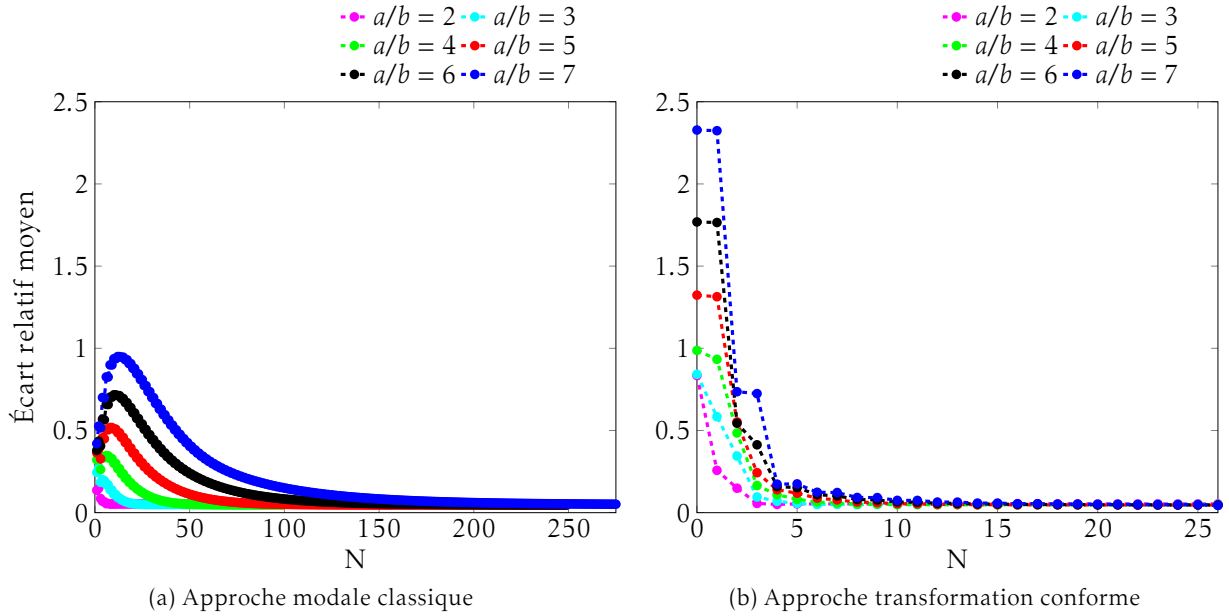


FIGURE 3.7. – Écart à la solution SimSonic pour l'approche modale classique (a) et pour l'approche transformation conforme (b), pour des ellipses de différents rapports d'aspect. Dans tous les cas le demi petit axe est fixé à $b = 0,05$ mm, et c'est le demi grand axe a qui est varié.

il reste malgré tout très important. Ainsi il a fallu pas moins de 140 processeurs en parallèle pour obtenir les calculs à 300 décimales dans un temps convenable (de l'ordre d'une semaine). Réduire le nombre de modes à calculer est donc crucial, et c'est justement ce que permet l'approche transformation conforme. Il faut moins de 2 jours de calcul avec l'approche transformation conforme contre près de 170 jours avec la méthode classique pour atteindre l'écart minimum à la précision de 100 décimales. Le gain est considérable, même si le temps reste relativement long. Le temps réel de calcul est cependant fortement diminué par la parallélisation des calculs des coefficients, et en privilégiant un langage compilé type C++. À noter que ces temps correspondent seulement au calcul des coefficients. Il faut ensuite rajouter la résolution du système (inversion de la matrice) et le calcul à proprement parler de la pression. Ces étapes sont néanmoins beaucoup plus rapides et donc négligeables, sauf dans le cas de grandes matrices, ce qui pénalise encore un peu plus l'approche classique.

Revenons maintenant à la controverse sur l'utilité de l'approche transformation conforme. Du point de vue des instabilités numériques, il n'y a effectivement pas de différence notable, puisque pour l'ellipse étudiée l'écart minimal est sensiblement le même dans les deux cas. En ce sens l'approche transformation conforme est contrainte aux mêmes limites que l'approche classique. Mais c'est sans compter un autre paramètre fondamental à prendre en compte : le temps de calcul. Et là, l'intérêt de l'approche transformation conforme est colossal, puisqu'elle nécessite beaucoup moins de coefficients à calculer. Ceci est d'autant plus vrai que la forme du diffuseur s'éloigne du disque, comme nous allons le voir maintenant.

3.3.4. Influence du rapport d'aspect de l'ellipse

La figure 3.7 montre pour les deux méthodes l'influence du rapport d'aspect sur la convergence de la solution. Pour cela le demi petit axe $b = 0,05$ mm est fixé et le demi grand axe a varie de façon

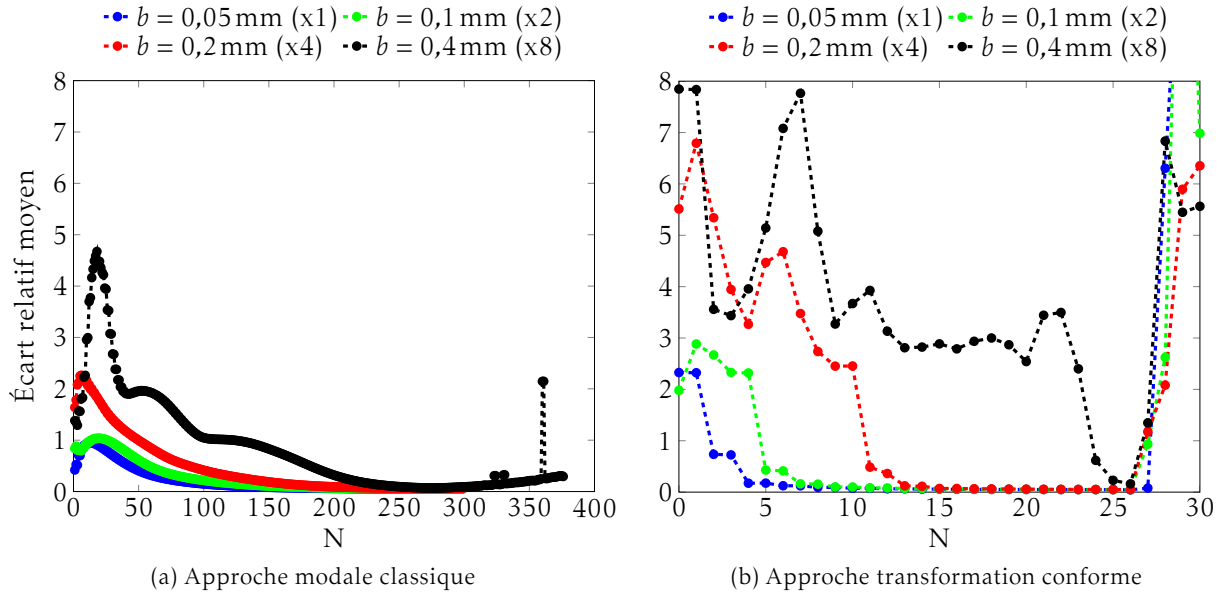


FIGURE 3.8. – Écart à la solution SimSonic pour l'approche modale classique (a) et pour l'approche transformation conforme (b) pour des ellipses de différentes tailles. Le rapport d'aspect est fixé à $a/b = 7$. Quatre tailles d'ellipses sont étudiées : $b = 0,05 \text{ mm}$ (bleu, même courbe que dans la figure 3.7), $b = 0,1 \text{ mm}$ (vert), $b = 0,2 \text{ mm}$ (rouge) et $b = 0,4 \text{ mm}$ (noir). La précision utilisée est de 100 décimales.

à faire varier le rapport d'aspect. Les calculs sont effectués à des précisions suffisantes pour s'affranchir d'éventuelles instabilités numériques (typiquement entre 50 et 100 décimales). Pour les deux approches la convergence est plus longue à s'établir lorsque le rapport d'aspect augmente¹⁷. Ainsi tout comme un signal temporel contenant des variations brusques se traduit par une grande richesse de fréquences, la pression diffusée par un objet dont la forme s'éloigne significativement du disque contient un nombre de modes élevé. Bien sûr, en augmentant la taille du grand axe, la taille du diffuseur par rapport à la longueur d'onde augmente également, ce qui pourrait expliquer la nécessité d'un nombre plus grand de modes. Mais le calcul de la pression diffusée par un disque rigide de rayon $a = 0,35 \text{ mm}$, soit le plus élevé demi grand axe considéré ici, converge dès $N = 7$ contre $N = 2$ pour un disque de rayon $a = b = 0,05 \text{ mm}$. C'est donc bien l'aspect elliptique qui explique le nombre de modes nécessaires pour atteindre la convergence.

Le calcul de la diffusion par une ellipse longue est donc doublement pénalisé. Il nécessite de prendre en compte un grand nombre de modes, donc de calculer de nombreux coefficients, ce qui est long. Mais plus l'ordre est élevé, moins la matrice est bien conditionnée, donc les coefficients doivent être calculés avec une meilleure précision, ce qui rend le calcul encore plus long.

3.3.5. Influence de la taille de l'ellipse

La taille du diffuseur peut également influencer la convergence de la solution. La figure 3.8 montre l'écart relatif moyen pour quatre ellipses de même rapport d'aspect $a/b = 7$, mais de tailles différentes. Les calculs ont tous été effectués à 100 décimales. Comme attendu, à N fixé, plus le diffuseur est grand, plus l'écart à la solution SimSonic est grand. Un diffuseur plus grand nécessite donc de calculer plus de modes. À noter que la précision de la solution SimSonic est modifiée

¹⁷. C'est moins visible pour l'approche transformation conforme puisqu'il faut de toute façon moins de modes, mais le phénomène est également présent.

lorsque la taille du diffuseur varie, et cela pour deux raisons. Tout d'abord le rapport entre la taille du diffuseur et le pas spatial de la simulation est modifié, donc la précision de la discrétisation du contour de l'ellipse également. Ensuite, l'approximation de l'onde plane par une onde apodisée (§A.4.2) devient moins bonne lorsque le diffuseur est plus grand. Il ne faut donc pas attacher une importance démesurée aux valeurs des écarts, surtout lorsqu'ils sont faibles.

Dernier point important de la figure 3.8 : l'observation de l'ordre N d'apparition des instabilités (qui correspond à une augmentation anormale de l'écart). Pour l'approche modale classique ces instabilités apparaissent à partir de $N = 275$ quelle que soit la taille du diffuseur. De même pour l'approche transformation conforme les instabilités apparaissent sensiblement au même ordre $N = 27$. Dans les deux approches il semblerait donc que c'est le rapport d'aspect plus que la taille qui détermine l'apparition des instabilités numériques. Il y a là un certain paradoxe avec l'allure des fonctions de Bessel observée sur la figure 3.3. Mais dans la mesure où le système est dorénavant préconditionné, il est difficile de connaître réellement l'influence du conditionnement de la matrice d'origine. En revanche, il est certain que la méthode itérative de calcul des intégrales des coefficients de A et B a d'autant plus de difficultés à converger que le rapport d'aspect de l'ellipse augmente. C'est donc une possible explication au fait qu'à rapport d'aspect constant les instabilités apparaissent au même moment quelle que soit la taille de l'ellipse.

3.4. Retour au diffuseur élastique

L'étude du diffuseur rigide nous a permis d'apprécier l'apport du calcul en précision arbitraire. Mais il a également révélé le problème du temps de calcul. Or, dans le cas des diffuseurs élastiques, la matrice A est de taille $(3(2N + 1))^2$ et le vecteur B contient $3(2N + 1)$ coefficients. Il y a ainsi $6(2N + 1)(3N + 2)$ coefficients à calculer contre $(2N + 1)(2N + 2)$ dans le cas rigide, ce qui allonge encore le temps de calcul et rend la méthode difficilement utilisable en pratique.

Voyons malgré tout comment se comportent les calculs à précision plus élevée dans le cas élastique. La figure 3.9 montre l'écart moyen relatif à SimSonic pour des ellipses de différents rapports d'aspect. Pour l'ellipse de rapport d'aspect $a/b = 2$ (fig. 3.9a), la précision standard est suffisante et le calcul du champ converge relativement vite. Dans le cas de l'ellipse de rapport d'aspect $a/b = 3$ (fig. 3.9b) les instabilités apparaissent dès $N = 17$ à précision standard. Le calcul à une précision de 100 décimales permet de calculer plus de modes pour atteindre une meilleure précision. La convergence n'est vraisemblablement pas atteinte mais l'écart à SimSonic est acceptable. C'est un résultat qui mérite d'être souligné : **l'augmentation de la précision numérique permet également d'améliorer le calcul du champ diffusé par des cylindres élastiques.**

L'étude des ellipses de rapport $a/b = 4$ (fig. 3.9c) et $a/b = 7$ (fig. 3.9d) vient cependant nuancer ce bon résultat. Pour ces deux ellipses le calcul à 100 décimales ne suffit pas à obtenir un écart avec la solution SimSonic satisfaisant, même si pour le cas (c) cela permet vraisemblablement d'amorcer une convergence. Des calculs à 300 voire 600 décimales pour l'ellipse la plus longue ont donc été menés. Les résultats ne sont pas ceux escomptés, puisqu'il n'y a aucune différence avec les calculs menés à seulement 100 décimales. Pour expliquer cette déconvenue, plusieurs hypothèses sont envisageables :

- Des instabilités numériques peuvent persister dans les codes utilisés. Une "fuite numérique" non identifiée pourrait bloquer la précision à un niveau insuffisant pour correctement décrire les ellipses les plus complexes.
- Il est possible que les précisions utilisées ne soient pas encore suffisantes. Le fait cependant que les calculs à 100, 300 et même 600 décimales aient donné strictement le même résultat rend cette hypothèse peu crédible puisque la convergence vis-à-vis de la précision numérique semble établie.

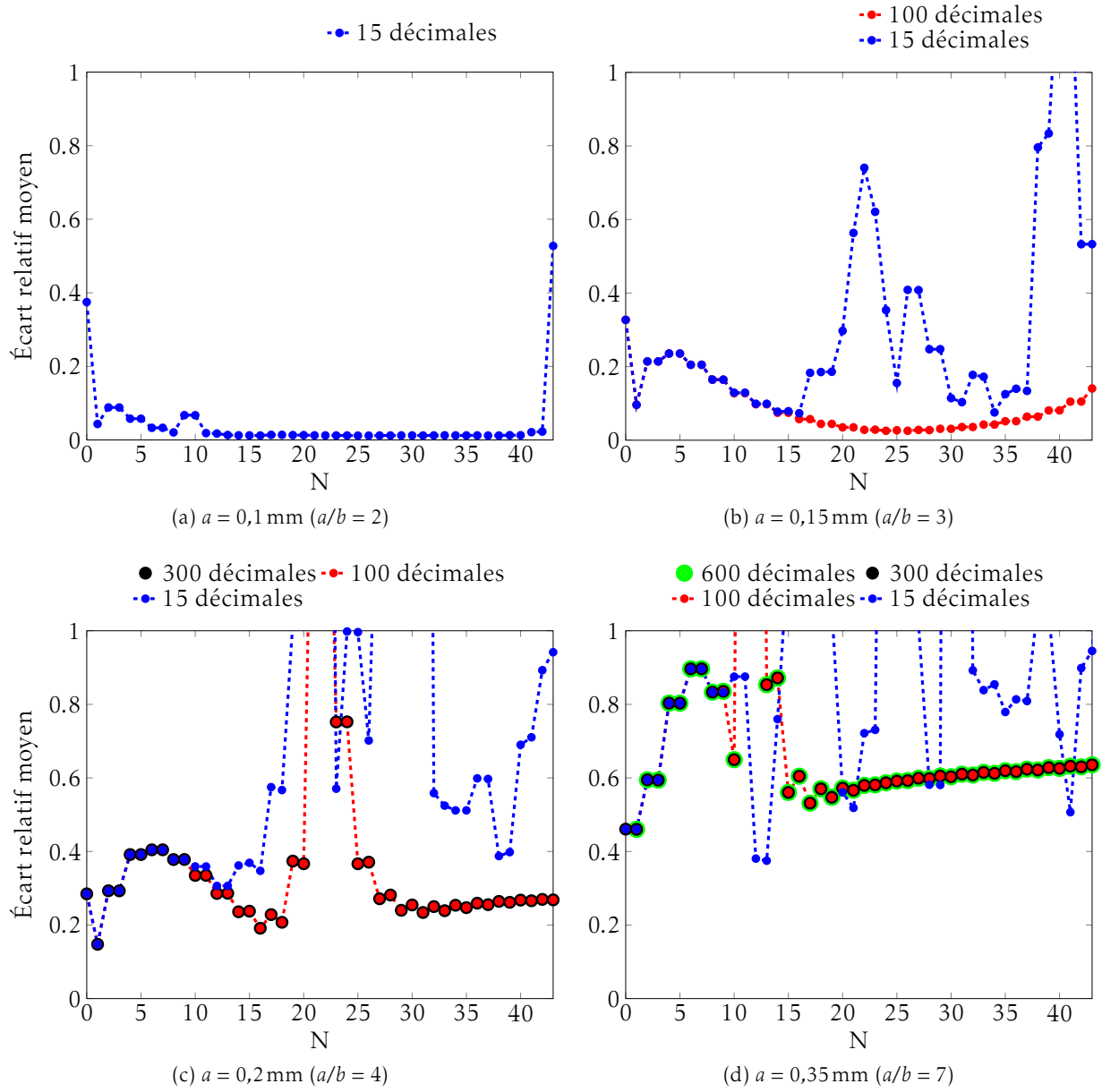


FIGURE 3.9. – Écart à la solution SimSonic pour des ellipses élastiques de différents rapports d'aspect et à diverses précision de calcul. Le demi petit axe est fixé à $b = 0,05 \text{ mm}$, et le demi grand axe a varie : (a) $a = 0,1 \text{ mm}$ ($a/b = 2$), (b) $a = 0,15 \text{ mm}$ ($a/b = 3$), (c) $a = 0,2 \text{ mm}$ ($a/b = 4$), (d) $a = 0,35 \text{ mm}$ ($a/b = 7$). En bleu : précision standard de 15 décimales. En rouge : précision de 100 décimales. En noir : précision de 300 décimales. En vert : précision de 600 décimales.

- Il se peut aussi que, pour les ellipses élastiques de grand rapport d'aspect, un autre phénomène numérique intervienne pour lequel la précision numérique est sans effet. Par exemple, d'après la référence [39], la résolution du problème par l'inversion de la matrice carrée est dans certain cas nécessairement instable numériquement. Il faudrait alors résoudre le problème par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés, en prenant plus de points à la surface du diffuseur que de modes (la matrice A contient alors plus de lignes que de colonnes). Les quelques tests que nous avons menés en ce sens ont cependant été infructueux.
- Enfin il se peut que le problème ne vienne pas de l'approche modale mais de la solution SimSonic. Pour les deux ellipses la solution semi-analytique reste certes significativement différente de la solution SimSonic, mais semble converger. Peut-être alors que c'est la solution SimSonic qui est fautive. Cela pourrait être envisageable si pour ces diffuseurs particuliers le champ diffusé était fortement sensible à des légères variations de forme du diffuseur, causées par la discrétisation du diffuseur. Il y a quand même plus de raisons de douter de la solution semi-analytique, puisque si elle était juste cela signifierait que la convergence serait plus rapide pour l'ellipse de rapport 7 que pour celle de rapport 4 et même celle de rapport 3. Et cette convergence serait également beaucoup plus rapide que pour les ellipses rigides de même taille. En outre, pour la solution SimSonic, de petites variations de taille des diffuseurs (ajout ou suppression d'un pixel) n'ont pas montré de variations brutales au niveau du champ diffusé. Pour s'assurer malgré tout que la solution SimSonic est correcte, on pourrait envisager d'utiliser une tierce méthode, des mesures expérimentales par exemple.

3.5. Quelle technique utiliser ? Discussion selon le type de diffuseur

Pour conclure ce chapitre, voici un rapide tour d'horizon de la technique à privilégier selon les besoins et le diffuseur étudié.

3.5.1. Diffuseur circulaire

Que le diffuseur soit rigide, élastique ou fluide, la méthode de choix est la résolution analytique fondée sur la décomposition modale en coordonnées polaires (§3.1.1). Cette solution cumule les avantages de rapidité de calcul et de précision du résultat obtenu. Malgré l'absence de matrice à inverser, cette technique peut tout de même être sujette à des problèmes numériques. Les coefficients A_n font en effet intervenir des fonctions de Bessel et Hankel au numérateur et au dénominateur. Au delà d'un certain nombre de modes, le coefficient A_n devient donc difficile à calculer numériquement et peut même renvoyer la valeur "NaN", signifiant qu'il est incalculable. Ainsi dans le cas du disque d'os traité en annexe A.4.1, l'ordre maximal de troncature pour un calcul en précision standard est $N = 62$. Dans les faits la convergence de la solution en fonction du nombre de modes est atteinte bien avant. Il suffit donc de prendre en compte un nombre de modes raisonnable pour lequel la convergence est déjà assurée.

Références utiles : [40, 41]

3.5.2. Diffuseurs rigides ou fluides

Diffuseur elliptique

Lorsque l'ellipse est rigide ou fluide, la décomposition modale en coordonnées elliptiques, avec l'utilisation de fonctions de Mathieu, est à préférer. Si le formalisme mathématique est un peu plus complexe qu'en polaire, cette technique a le grand avantage de ne pas nécessiter d'inversion de matrice dans le cas d'un diffuseur elliptique. Elle est donc *a priori* stable numériquement, même pour des ellipses de grand rapport d'aspect, et également relativement rapide.

Références utiles : [42, 43]

Diffuseur de forme quelconque

Pour un diffuseur rigide ou fluide de forme quelconque, les seules techniques envisageables sont la décomposition modale polaire classique, les transformations conformes ou une résolution purement numérique type SimSonic. Nous avons vu (§3.3) que les transformations conformes étaient à privilégier pour le gain de temps considérable qu'elles procurent vis-à-vis de l'approche modale classique¹⁸. Le choix entre méthode semi-analytique et solution purement numérique comme SimSonic est lui discuté dans un cas plus général par la suite.

3.5.3. Diffuseur élastique de forme quelconque

L'utilisation des coordonnées elliptiques est à proscrire pour les diffuseurs elliptiques élastiques [44, 45]. Les transformations conformes, dont nous avons vu le potentiel dans le cas rigide, n'ont à ce jour jamais été adaptées au cas du diffuseur élastique. Les seules façons de traiter le diffuseur élastique elliptique / de forme quelconque sont donc la décomposition polaire ou l'approche purement numérique de type SimSonic. L'utilisation privilégiée de l'une ou l'autre des techniques dépend de nombreux paramètres et du problème considéré. Aussi il est difficile d'établir un critère quantitatif précis. L'idée est donc plutôt de voir quelles situations avantagent tantôt l'une technique, tantôt l'autre. Une tendance se dégage malgré tout, indépendamment du problème considéré. Si l'on privilégie la précision du résultat, il vaut mieux utiliser les méthodes semi-analytiques quand cela est possible. Si c'est le temps de calcul le critère principal, alors l'approche purement numérique peut être plus intéressante.

Forme du diffuseur

Si la forme du diffuseur n'est pas trop éloignée de celle d'un disque, le nombre de modes significatifs dans la décomposition polaire reste relativement faible. C'est ce qui a été observé pour les ellipses de faible rapport d'aspect. Le calcul des coefficients de la matrice ne nécessite donc pas une précision de calcul trop importante, et le temps de calcul est relativement faible. La méthode semi-analytique sera donc à privilégier car intrinsèquement plus précise.

Lorsque la forme du diffuseur s'éloigne de celle du disque (ellipse longue), il faut calculer un nombre très élevé de modes. Cela nécessite une grande précision de calcul et implique des ressources informatiques considérables. D'autre part nous avons vu avec la figure 3.9 que nous n'étions pas capables de calculer correctement le champ diffusé par une ellipse élastique de grand rapport d'aspect. L'approche SimSonic est donc à privilégier, même s'il est difficile d'avoir une grande précision avec cette technique.

Taille du diffuseur

Tout comme la forme, la taille du diffuseur, comparativement à la longueur d'onde dans le fluide, influence le nombre de modes à prendre en compte. Plus le diffuseur est grand, plus le nombre de modes à prendre en compte est grand. Les petits diffuseurs gagneront donc à être traités par une approche semi-analytique. Ceci est d'autant plus vrai que la discrétisation du diffuseur sera moins bonne par l'approche FDTD. Si la taille augmente trop, l'utilisation de SimSonic peut devenir avantageuse.

18. Ce résultat a été observé pour des diffuseurs elliptiques avec angle d'incidence nul. Néanmoins, il est légitime de penser que le comportement sera sensiblement le même pour un diffuseur quelconque, dont la résolution ne diffère que par l'expression du contour $a(\theta)$.

Champ diffusé en fonction de la fréquence

Le calcul de la matrice A de la méthode semi-analytique n'est valable qu'à une fréquence donnée. Si l'objectif est d'étudier le comportement du diffuseur en fonction de la fréquence, il faut répéter le calcul un grand nombre de fois. Le temps de calcul peut donc devenir très long. De son côté l'approche SimSonic est une méthode temporelle. Le champ diffusé est donc directement accessible sur toute la largeur spectrale du signal émis. De ce fait, une étude fréquentielle renforce l'intérêt des méthodes temporelles purement numériques.

Champ diffusé en fonction de la distance d'observation

Dans l'approche semi-analytique, le système $Ax = B$ est indépendant de la distance d'observation. Or c'est la résolution de ce système qui est l'étape délicate de la méthode. Une fois les coefficients A_n calculés, il est ensuite très facile de faire varier la distance d'observation.

Pour l'approche SimSonic, la distance d'observation va conditionner la taille de la carte. Plus cette distance sera grande, plus la carte devra l'être, ce qui augmente le temps de calcul. Cette fois c'est l'approche semi-analytique qui est avantageuse.

Dans le futur

Les résultats exposés tout au long de ce chapitre ont demandé des ressources informatiques considérables, difficiles à mettre en œuvre il y a plusieurs années ou dizaines d'années. Ces ressources sont donc partie intégrante du problème, principalement pour le temps de calcul. À l'avenir les ordinateurs seront toujours plus puissants et plus rapides, ce qui est à l'avantage des méthodes semi-analytiques dont le point faible est justement ce temps de calcul. Le nombre de processeurs par machine de calcul ne cesse également d'augmenter, ce qui permet une parallélisation des calculs bien adaptée aux méthodes semi-analytiques puisque les calculs des coefficients sont indépendants.

D'autre part, en l'état actuel des capacités informatiques, des optimisations de l'algorithme de calcul sont toujours possibles. Notre effort en ce sens a été minimal puisqu'il s'agissait d'une étude préliminaire. Il convient déjà d'utiliser un langage compilé, optimisé, pour améliorer le temps de calcul. Avant cela, il reste également à régler la question des ellipses élastiques de grands rapports d'aspect, pour lesquelles l'augmentation de précision n'est pas suffisante.

Enfin, c'est important de le souligner, si tant est que cela est véritablement possible, une approche transformation conforme pour des diffuseurs élastiques devrait permettre de réduire considérablement le temps de calcul. C'est donc une piste très sérieuse à étudier.

3.6. Conclusion

L'objectif premier de ce chapitre était de mettre en lumière les problèmes numériques rencontrés lors du calcul du champ diffusé par des ellipses de grand rapport d'aspect. Au mieux, ils étaient quelques fois évoqués [37, 38], mais en dehors d'une publication récente [39] n'étaient pas réellement illustrés et étudiés. L'origine de ces problèmes est le mauvais conditionnement des matrices à inverser, dû à la singularité en 0 des fonctions de Bessel.

Plusieurs pistes ont ensuite été explorées pour tenter d'améliorer la situation. Une première technique simple, classique lorsqu'il est question d'inversion de matrices, est le préconditionnement. Elle permet d'atténuer l'effet du mauvais conditionnement des matrices, mais cela n'est malheureusement pas toujours suffisant. Nous avons alors vu une autre méthode plus efficace : l'augmentation de la précision des calculs. Les calculs à précision élevée permettent de calculer un nombre plus grand de modes sans instabilités numériques. Pour les diffuseurs rigides étudiés,

de rapport d'aspect maximal $a/b = 7$, cela a suffi pour calculer correctement les champs diffusés. Pour les ellipses élastiques il reste cependant un point à éclaircir puisque le calcul du champ diffusé par les ellipses de rapport d'aspect supérieur à 4 n'est pas satisfaisant.

Enfin, le point crucial à améliorer est le temps de calcul. L'augmentation du nombre de modes à prendre en compte pour des ellipses de grand rapport d'aspect augmente considérablement le temps de calcul. C'est là une forte limite de la technique qui la rend en pratique difficilement utilisable. Des espoirs sont cependant permis. La piste la plus prometteuse est l'utilisation des transformations conformes. Dans le cas des diffuseurs rigides, ces techniques ont montré que, si elles sont confrontées aux mêmes problèmes numériques que l'approche polaire classique, elles nécessitent le calcul de nettement moins de modes et sont donc beaucoup plus rapides. La généralisation au cas des diffuseurs élastiques apparaît donc particulièrement intéressante.

Après cet aparté sur le calcul du champ diffusé par des ellipses, le prochain chapitre revient à la compréhension de la propagation ultrasonore dans l'os trabéculaire. Pour cela, un modèle numérique simplifié est mis en place et étudié, afin de comprendre les paramètres qui interviennent dans l'existence des deux ondes longitudinales. Le lien avec ce chapitre est l'élément de base du modèle, qui est justement une ellipse (2D) ou un ellipsoïde (3D).

ÉTUDE DE MODÈLES POREUX ANISOTROPES NUMÉRIQUES

Les deux premiers chapitres de cette thèse concernaient les théories d'ondes en milieux poreux et de diffusion multiple, les unes comme les autres étant susceptibles de rendre compte, au moins en partie, de la propagation dans l'os trabéculaire. Les hypothèses pour ces deux familles de théories ne sont pourtant pas les mêmes. Alors que les premières théories reposent sur une homogénéisation du milieu, ce qui limite le domaine de validité aux basses fréquences, les théories de la diffusion raisonnent sur l'onde cohérente. On pourrait donc penser que seule l'une ou l'autre de ces théories devraient s'appliquer. Ce n'est pourtant pas ce que suggèrent les travaux existant dans la littérature sur la propagation d'ondes dans l'os trabéculaire.

D'un côté, les théories d'ondes en milieux poreux prévoient la propagation des deux ondes longitudinales observées sous certaines conditions dans l'os, et obtiennent même des résultats satisfaisants pour la prédiction des vitesses de propagation de ces deux ondes [16]. En dehors de cela, elles échouent à prévoir l'atténuation, et n'expliquent pas clairement le rôle joué par l'anisotropie sur l'observation des deux ondes longitudinales, pourtant avérés expérimentalement. D'un autre côté, l'étude du pic de rétrodiffusion cohérente a montré qu'il fallait tenir compte de la diffusion multiple dans l'os poreux [33], ce qui pourrait expliquer l'atténuation observée.

L'os trabéculaire semble donc se situer à l'interface entre ces différentes théories, et il est important de comprendre comment elles peuvent coexister, et quel est l'apport que chacune d'elles. Pour répondre à ces questions, il est difficile de s'intéresser directement à l'os trabéculaire, dont la structure est dans un premier temps trop complexe pour appréhender les paramètres qui interviennent sur la vitesse et l'atténuation. L'objet de ce chapitre est donc de créer un modèle simple, contrôlé par peu de paramètres, mais qui rend compte des caractéristiques importantes de l'os trabéculaire d'un point de vue ultrasonore. L'outil numérique est bien adapté à la création d'un tel modèle, par la flexibilité qu'il apporte et la possibilité de modifier simplement les paramètres, indépendamment les uns des autres.

L'ensemble de ce chapitre est donc constitué de résultats obtenus avec des modèles poreux numériques anisotropes, ayant fait l'objet de publications parues récemment [53, 54]. Dans un premier temps, seule l'observation de deux ondes longitudinales est étudiée, ce qui a pour but à la fois de justifier l'utilisation d'un tel modèle mais aussi de comprendre l'influence de quelques paramètres simples (fraction solide, anisotropie, ...). Ensuite, vitesses et coefficients d'atténuation sont déterminés pour quelques uns de ces milieux numériques. Ces résultats sont confrontés aux théories d'ondes en milieux poreux et de diffusion multiple, sans aucun ajustement de paramètre, contrairement à ce qui est fait dans l'os trabéculaire. De cette façon, il est possible de mieux cerner ce qu'on peut attendre des différentes théories.

4.1. Le modèle

4.1.1. Mise en place du modèle

Le logiciel de simulation de propagation d'ondes utilisé est SimSonic, déjà mentionné dans les chapitres précédents et auquel l'annexe A est dédiée. Les deux versions, à deux et trois dimensions, sont utilisées dans ce chapitre. Il est important de noter qu'**aucune source d'absorption** n'est prise en compte dans l'équation d'onde simulée avec la version de SimSonic utilisée.

Quelles sont les caractéristiques essentielles de l'os trabéculaire que doit posséder le modèle numérique ? Tout d'abord, le premier point évident est qu'il doit être poreux, donc biphasique. Les propriétés utilisées pour la phase solide (os) et la phase fluide (eau) sont données en annexe A.1.2. L'autre caractéristique essentielle, largement discutée jusqu'à maintenant, est l'anisotropie structurelle de l'os trabéculaire. Plus exactement, nous allons chercher à obtenir un milieu isotrope transverse. Enfin, le milieu doit être désordonné, avec des dimensions caractéristiques qui doivent autant que possible correspondre à celles de l'os trabéculaire ([27], chapitre 1).

Le but d'un modèle est de simplifier la structure existante (il suffirait sinon de prendre des structures osseuses numérisées, ce qui sera fait dans le dernier chapitre). Par rapport à l'os poreux, de structure très complexe et hétérogène, le modèle numérique a vocation à être statistiquement homogène, afin de clairement identifier l'influence des différents paramètres. Pour les mêmes raisons ces paramètres doivent rester en nombre limité. À noter que des modèles numériques d'os trabéculaire ont déjà été établis par le passé [55], mais n'étudiaient pas forcément les mêmes paramètres qu'ici.

Le cahier des charges du modèle numérique étant établi, la façon la plus naturelle de remplir toutes ces conditions est de créer les milieux à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, en distribuant aléatoirement des diffuseurs solides allongés, orientés tous dans le même sens de façon à créer l'anisotropie (direction privilégiée), et dont le nombre déterminera la fraction solide du milieu. Les diffuseurs allongés considérés ici sont des ellipses pour le modèle 2D, et des ellipsoïdes pour le modèle 3D. Leur taille est choisie pour que les dimensions caractéristiques des milieux numériques ainsi créés soient de l'ordre de celles de l'os trabéculaire ([27], chapitre 1), notamment l'épaisseur moyenne des travées osseuses, de l'ordre de $100\ \mu\text{m}$. Ainsi le demi-grand axe vaut $a = 0,35\ \text{mm}$ et le(s) demi-petit(s) axe(s) $b = 0,05\ \text{mm}(= c)$ ¹. Le rapport d'aspect de ces diffuseurs est donc égal à 7, ce qui explique l'intérêt porté au calcul de la diffusion par des ellipses de grand rapport d'aspect dans le chapitre précédent. La figure 4.1, en plus de reprendre ces informations, est une illustration d'un milieu type à deux et trois dimensions de fraction solide 50%.

4.1.2. Les paramètres

Cette structure simplifiée, si elle n'a pas forcément la même apparence que l'os trabéculaire, a l'avantage d'être parfaitement contrôlable par seulement quelques paramètres. Voici les paramètres susceptibles d'être modifiés par la suite :

- Le premier d'entre eux est tout simplement la fraction solide, contrôlée à travers le nombre de diffuseurs introduits dans le milieu.
- Tout en fixant cette fraction solide, il est également possible de faire varier la connectivité entre les diffuseurs, en imposant ou non une exclusion entre eux. Par défaut, les diffuseurs peuvent s'interpénétrer, ce qui permet d'atteindre n'importe quelle fraction solide. L'exclusion entre diffuseurs ne sera possible que pour des fractions solides suffisamment faibles.
- Un autre paramètre particulièrement intéressant à étudier est l'angle entre direction de propagation et direction d'alignement. Pour que le modèle soit compatible avec le comportement ultrasonore de l'os trabéculaire, il est essentiel que le rôle de l'anisotropie sur

1. Le demi-petit axe c n'existe que dans le cas du modèle tridimensionnel.

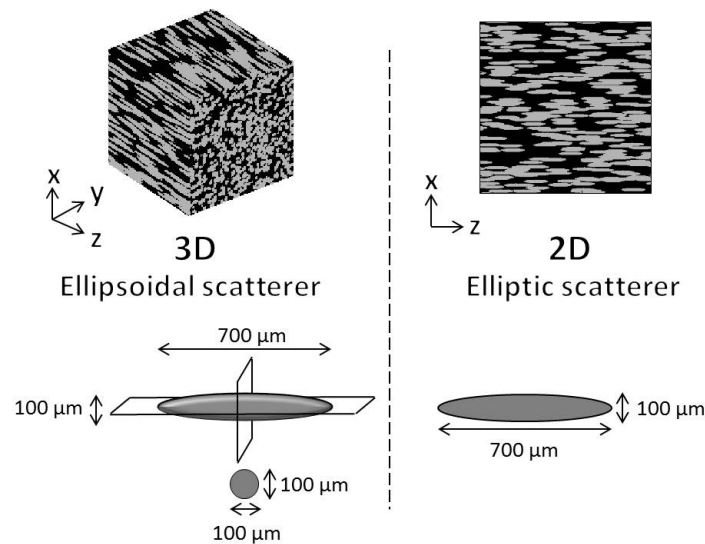


FIGURE 4.1. – Description du modèle, version 3D (gauche) et version 2D (droite). En noir, la phase fluide. En gris, la phase solide. Les exemples de cartes ont tous les deux été obtenus pour une fraction solide de 50%, ce qui consistera par la suite le modèle de référence pour chaque dimension.

l'observation ou non des deux ondes longitudinales soit le même pour le modèle que pour l'os.

- Les propriétés mécaniques de chacune des deux phases peuvent également être modifiées. Cela peut aller de la modification du module de cisaillement de la phase fluide jusqu'à des conditions extrêmes (par exemple, densité nulle ou infinie pour l'une des deux phases). L'inversion des propriétés de chacune des phases peut également être intéressante (la structure étant alors remplacée par son "négatif").
- Enfin, le rapport d'aspect des diffuseurs peut également être modifié.

De nombreux autres changements pourraient être apportés, comme par exemple donner des directions différentes aux diffuseurs, ou introduire une polydispersité. Notre approche consiste cependant, au moins dans un premier temps, à restreindre au maximum les paramètres qui régissent le milieu afin d'isoler plus clairement le rôle de chacun d'entre eux. D'une manière générale, si l'outil numérique est particulièrement intéressant pour tester rapidement toutes sortes de structure, l'excès de simulations peut être contre-productive.

4.2. Étude qualitative

L'objectif de cette partie est essentiellement qualitatif. Il s'agit d'étudier les conditions d'observation de deux ondes longitudinales en fonction des différents paramètres évoqués ci-dessus. L'enjeu est double, puisque cela doit d'un côté permettre de valider l'utilisation de ce modèle dans le cas de l'os trabéculaire, et en même temps permettre de comprendre l'influence des divers paramètres sur la propagation des ultrasons. Les caractéristiques précises des simulations sont données dans l'annexe A (§A.2 (3D) et §A.3 (2D)). L'onde plane émise est une impulsion sinusoïdale de fréquence centrale 1 MHz, et 100 récepteurs intégrants sur tout le plan transverse (moyenne spatiale) sont répartis uniformément le long de l'échantillon. Cela donne accès à un diagramme distance-temps.

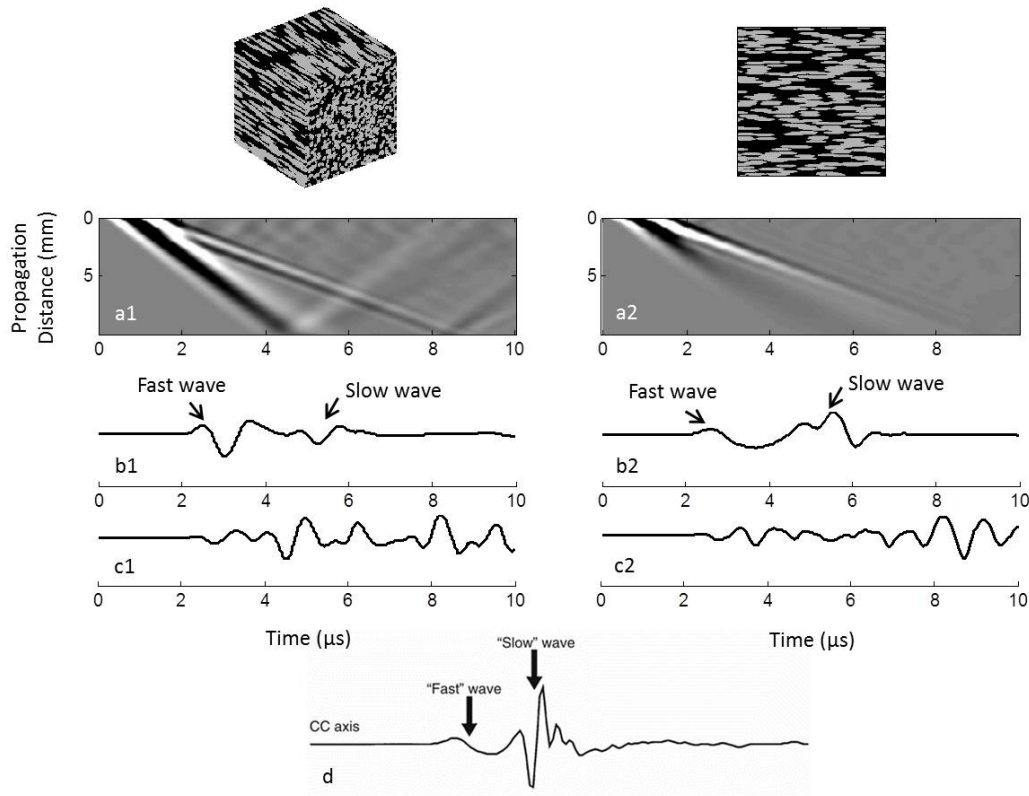


FIGURE 4.2. – Résultats de simulation de la propagation d’une onde plane (fréquence centrale 1 MHz) dans un milieu poreux isotrope transverse de fraction solide 50%, à trois dimensions (gauche) et deux dimensions (droite). Sont représentés des diagrammes espace-temps (a), le signal (normalisé) enregistré à une distance de propagation de 6 mm (b), et une seule réalisation, obtenue avec un émetteur et un récepteur ponctuels à cette même distance (c). Enfin à titre de comparaison un signal expérimental de propagation dans l’os trabéculaire est également représenté (d), issu de la référence [56].

La première étape cruciale qui conditionne toute la suite est de savoir si ce modèle permet bien d’observer deux ondes longitudinales. Comme le montre la figure 4.2, c’est effectivement le cas. Sur cette figure, la colonne de gauche représente les résultats obtenus avec le modèle 3D et la figure de droite les résultats 2D. Dans les deux cas, la simulation correspond à une propagation dans la direction privilégiée (direction des ellipses) pour une fraction solide de 50%. Les figures (a1) et (a2) montrent le diagramme obtenu pour chaque milieu. Si les amplitudes ne sont pas exactement les mêmes à deux et à trois dimensions, il y a dans les deux cas deux fronts d’onde distincts témoignant de la propagation de deux ondes. Comme le champ représenté est la composante de la contrainte dans la direction de propagation, ces deux ondes sont longitudinales, et il s’agit donc bien des ondes rapide et lente. Cela signifie qu’il est possible de les observer dans ces modèles numériques. Au passage, cette figure montre également la différence entre une réalisation (point source émetteur et point source récepteur, (c1) et (c2)) et l’onde cohérente ((b1) et (b2)), à l’image de ce qui avait déjà été observé dans le chapitre 2 avec les échantillons Sawbones. Elle illustre également tout l’intérêt des représentations utilisant une ligne de récepteurs plutôt que les simples signaux temporels pour distinguer les deux fronts correspondant aux ondes rapide et lente. Enfin, pour comparaison, est également représenté un signal expérimental de propagation dans l’os trabéculaire sur lequel apparaissent onde rapide et onde lente [56]. Ces simulations, où l’observation

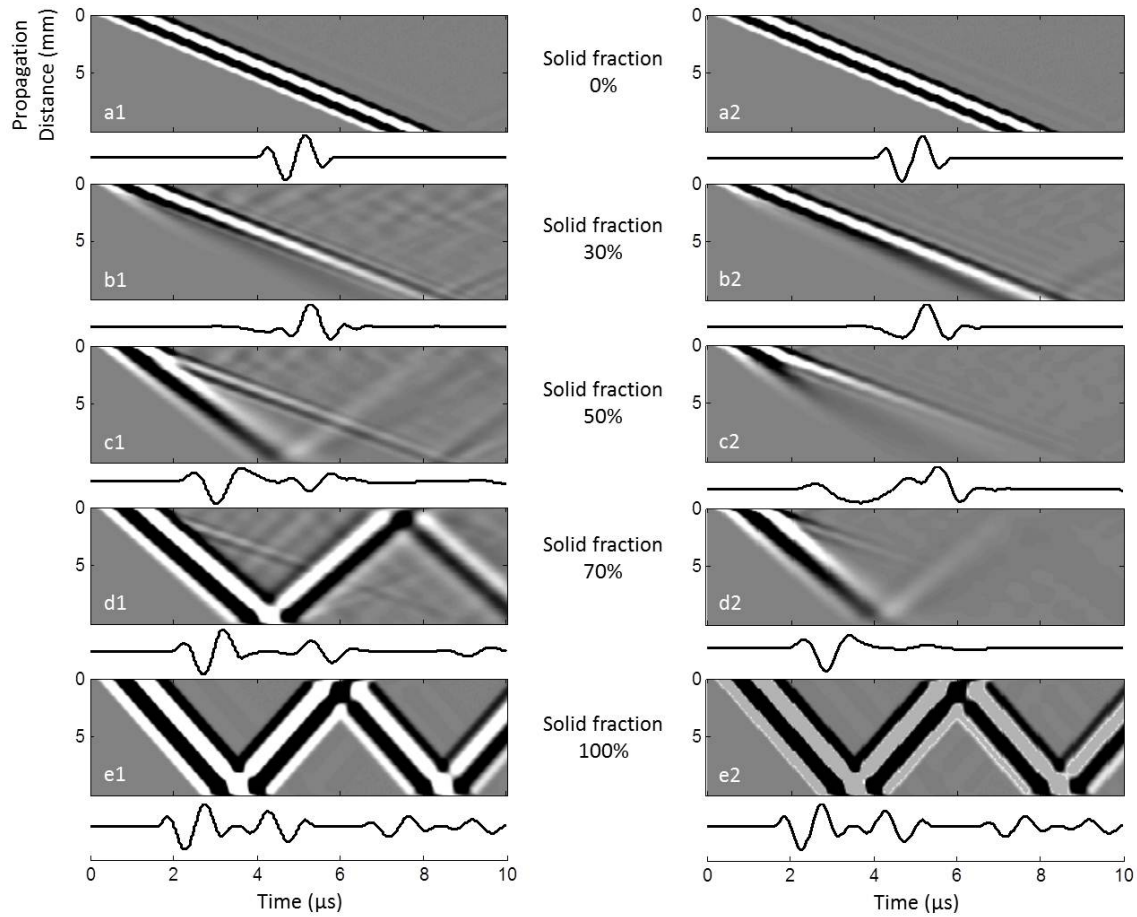


FIGURE 4.3. – Influence de la fraction solide, à trois dimensions (gauche) et deux dimensions (droite). La propagation est à chaque fois selon la direction privilégiée (grand axe des diffuseurs). Pour chaque simulation sont représentés le diagramme distance-temps ainsi que le signal enregistré à une distance de propagation de 6 mm.

des deux ondes est nette, seront les simulations de référence reprises comme références tout au long de cette partie.

4.2.1. Fraction solide

Le premier paramètre assez intuitif à faire varier est la fraction solide. Ainsi, la figure 4.3 représente les résultats obtenus pour des fractions solides égales à 0%, 30%, 50%, 70% et 100%. Bien sûr, lorsque la fraction solide est de 0% (resp. 100%), une seule onde est observée, dont la vitesse est celle de la phase fluide (resp. solide). À 50%, on retrouve les simulations de la figure précédente, qui faisaient apparaître deux fronts d'onde correspondant aux ondes rapide et lente. Lorsque l'on augmente la fraction solide, l'onde lente semble disparaître petit à petit. De même avec l'onde rapide lorsque la fraction solide diminue. Ainsi, **les deux ondes ne sont observées que pour une certaine plage de fraction solide**. Un premier inconvénient de ce modèle apparaît, puisque pour les fractions de solide typiques de l'os trabéculaire ($\phi_s = 0.1 - 0.2$), les deux ondes sont difficilement observables.

Enfin, tout comme l'exemple de fraction solide 50% semblait le montrer dans la figure précédente, le résultat qualitatif, c'est-à-dire l'observation ou non des deux ondes, est sensiblement la

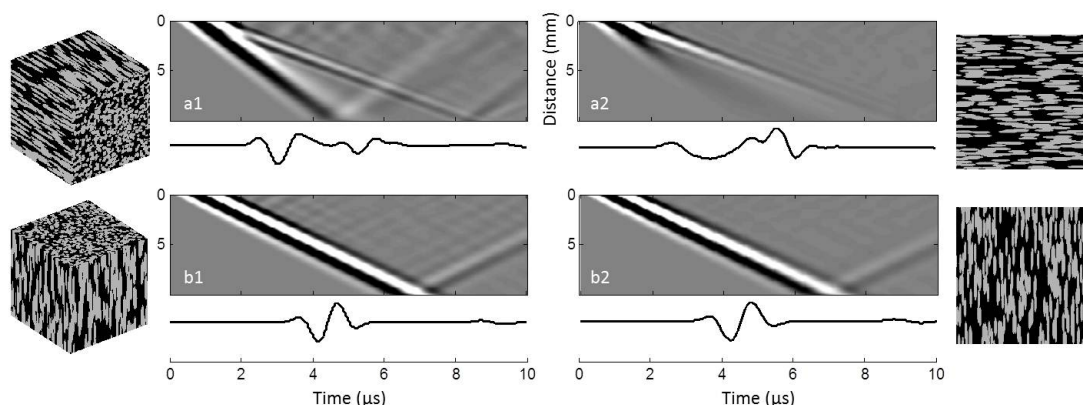


FIGURE 4.4. – Influence de la direction de propagation par rapport à la direction privilégiée du milieu, à 3D (gauche) et 2D (droite). La fraction solide est à chaque fois de 50%. Les simulations du haut sont les simulations de référence déjà étudiées précédemment. En bas, la direction de propagation est perpendiculaire à la direction formée par les diffuseurs. Là encore sont représentés le diagramme distance-temps ainsi que le signal enregistré à une distance de propagation de 6 mm.

même à 2D qu'à 3D. Il est à noter cependant que l'atténuation est visiblement bien plus forte à deux dimensions qu'à trois dimensions, principalement pour l'onde rapide.

4.2.2. Anisotropie

L'anisotropie est un paramètre fondamental de l'os trabéculaire. Pour que le modèle numérique soit réaliste, il est nécessaire que l'influence de la direction de propagation par rapport à la direction privilégiée soit la même que dans l'os trabéculaire. Autrement dit, deux ondes doivent être observées si la propagation a lieu selon la direction privilégiée, et une seule si la propagation est perpendiculaire à cette direction [7]. Deux approches complémentaires sont utilisées pour étudier l'influence de ce paramètre : l'approche onde plane, identique aux simulations précédentes, et une approche point source.

Approche onde plane

La première approche est celle déjà utilisée pour étudier l'influence de la fraction solide. Cette fois-ci la fraction solide est fixée à 50%, et c'est l'orientation des diffuseurs qui est modifiée, de sorte qu'elle est soit dans la direction de propagation, soit perpendiculaire. Les résultats obtenus à 2D et 3D sont donnés dans la figure 4.4. Effectivement, le comportement des modèles est le même que celui de l'os trabéculaire, quand la direction de propagation est perpendiculaire à la direction privilégiée, une seule onde est observée. Là encore, le résultat est qualitativement le même à deux et à trois dimensions. Pour la suite des résultats exposés dans cette partie, la comparaison entre les modèles 2D et 3D ne sera donc pas systématiquement reprise.

Approche point source

Une autre façon d'aborder la question de l'anisotropie consiste à étudier la propagation à partir d'un point source placé au centre de la carte. L'intérêt de cette approche est de pouvoir observer simultanément toutes les directions de propagation par rapport à la direction d'anisotropie. Cela suppose par contre d'adapter les caractéristiques des simulations. En effet, avec une telle configuration, la moyenne spatiale qui permettait jusqu'alors une estimation de l'onde cohérente n'est

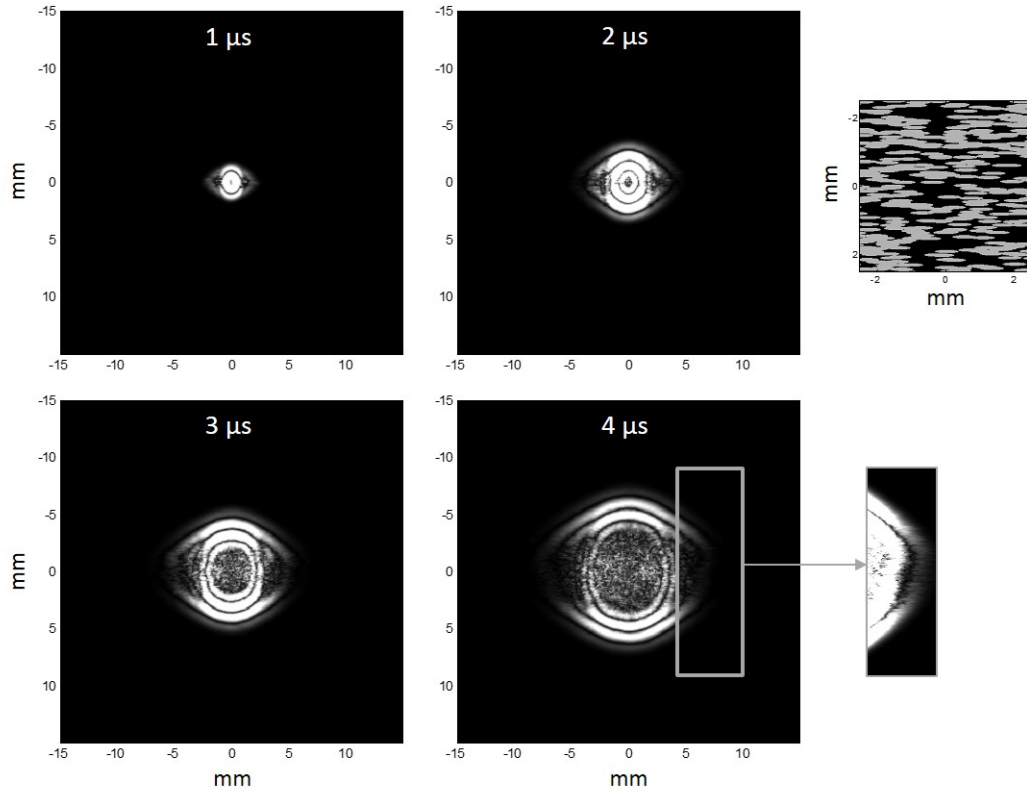


FIGURE 4.5. – Estimation de l'onde cohérente à l'aide de 50 réalisations d'un milieu poreux isotrope transverse 2D de fraction solide 50%. Pour cela, un point source est placé au centre de chaque carte. Quatre temps de propagation différents sont représentés. L'orientation des ellipses est indiquée par l'extrait de carte en haut à droite.

plus possible. Cette estimation nécessite donc une moyenne d'ensemble. Pour cela, 50 réalisations du milieu référence 2D ont été utilisées (fraction solide de 50%), et dans chaque cas les signaux issus d'un point source placé au centre² ont été enregistrés, puis moyennés. Chacune des cartes a une dimension de $30 \times 30 \text{ mm}^2$. C'est pour des raisons de capacité de calcul (cartes plus grandes, plusieurs réalisations) que les simulations ont uniquement été menées à deux dimensions. Tous les résultats précédents ont cependant montré que les résultats étaient qualitativement les mêmes à deux et à trois dimensions.

La figure 4.5 représente l'estimation du champ cohérent à $1 \mu\text{s}$, $2 \mu\text{s}$, $3 \mu\text{s}$ et $4 \mu\text{s}$. Comme avec l'approche précédente, on constate qu'un seul front d'onde est observé dans la direction de propagation perpendiculaire aux ellipses, alors que deux fronts d'onde apparaissent dans la direction privilégiée, malgré la forte atténuation de l'onde rapide, déjà observée précédemment. Mais en plus de ces résultats qui confirment les précédents, cette approche permet de voir la transition du régime d'une à deux ondes, qui semble être continue.

Cette transition donne des pistes sur l'absence d'observation des deux ondes dans le cas de la propagation perpendiculaire à la direction d'anisotropie. Comme déjà évoqué lors des expériences sur les mousses Sawbones, il y a plusieurs raisons qui peuvent expliquer l'observation d'une seule onde : atténuation très forte d'une des deux ondes, ondes de vitesses identiques, onde à vitesse nulle. Ici, la transition continue observée pourrait plutôt laisser penser à l'hypothèse

2. Pour éviter d'éventuels problèmes numériques, nous nous sommes assurés que ce point source était dans la phase fluide.

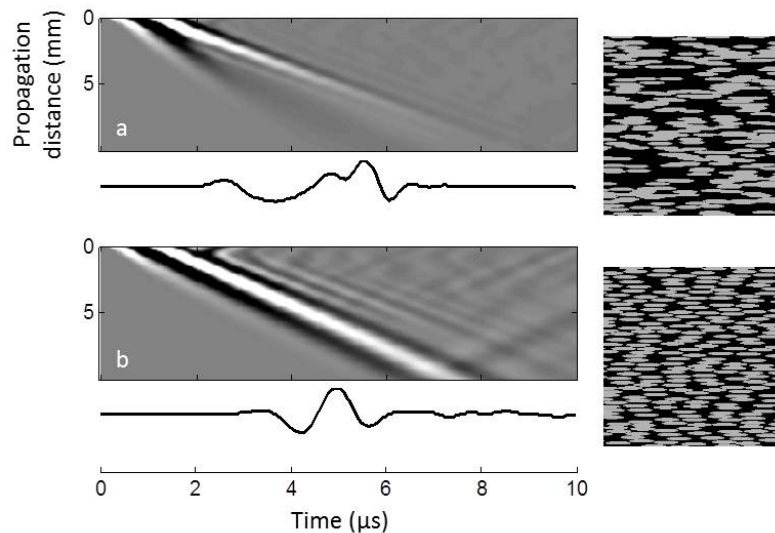


FIGURE 4.6. – Influence de la connectivité des diffuseurs sur l'observation des deux ondes longitudinales. Pour ces simulations 2D, les deux milieux ont la même fraction solide de 50%. Dans la simulation du haut, la référence, aucune condition d'exclusion n'est imposée aux diffuseurs, ils peuvent donc se superposer. Dans la simulation du bas en revanche, il y a une condition d'exclusion entre les ellipses. Elles ne peuvent donc au mieux que se toucher. Sont représentés le diagramme distance-temps ainsi que le signal enregistré à une distance de propagation de 6 mm.

de deux ondes de même vitesse, puisque les deux fronts d'ondes se rejoignent dans la direction perpendiculaire à la direction privilégiée.

4.2.3. Connectivité des diffuseurs

Influence d'une exclusion entre les diffuseurs

Jusque là, aucune condition n'était imposée sur la position des centres des diffuseurs. En conséquence, ceux-ci pouvaient se superposer. Quel serait maintenant l'impact d'une exclusion entre les diffuseurs? La réponse à cette question nécessite la création d'un milieu difficile à obtenir. En effet, jusqu'à maintenant, les milieux pour lesquels les deux ondes étaient le plus clairement observées étaient ceux de fraction solide égale à 50%. Mais imposer une exclusion avec une telle fraction solide est délicat, et l'établissement des cartes prend beaucoup de temps. Ainsi, cette simulation n'a été réalisée qu'à deux dimensions. Encore une fois, les résultats obtenus jusqu'à maintenant permettent d'être confiant sur une extrapolation des résultats 2D à un modèle 3D.

La figure 4.6 montre une comparaison de la simulation référence avec une simulation dans un milieu de même fraction solide, mais avec une exclusion imposée entre les ellipses. La différence est claire : lorsqu'il y a exclusion entre les diffuseurs, une seule onde est observée. Ce résultat fait écho à un résultat expérimental déjà évoqué au premier chapitre, celui de Johnson et Plona [15]. Ils avaient observé que lorsque des billes de verres étaient au mieux au contact (comme les ellipses des simulations) dans l'eau, une seule onde était observée. En revanche, lorsque ces billes étaient légèrement fondues pour fusionner en une unique phase solide, deux ondes étaient cette fois-ci observées. C'est cette expérience qui est d'ailleurs à l'origine du cas "squelette non consolidé" décrit dans la première partie (§1.3.4), qui expliquait pourquoi lorsque le module du squelette sec est nul, une seule onde était observée. Ainsi, la théorie de Biot est en accord avec le résultat de cette simulation.

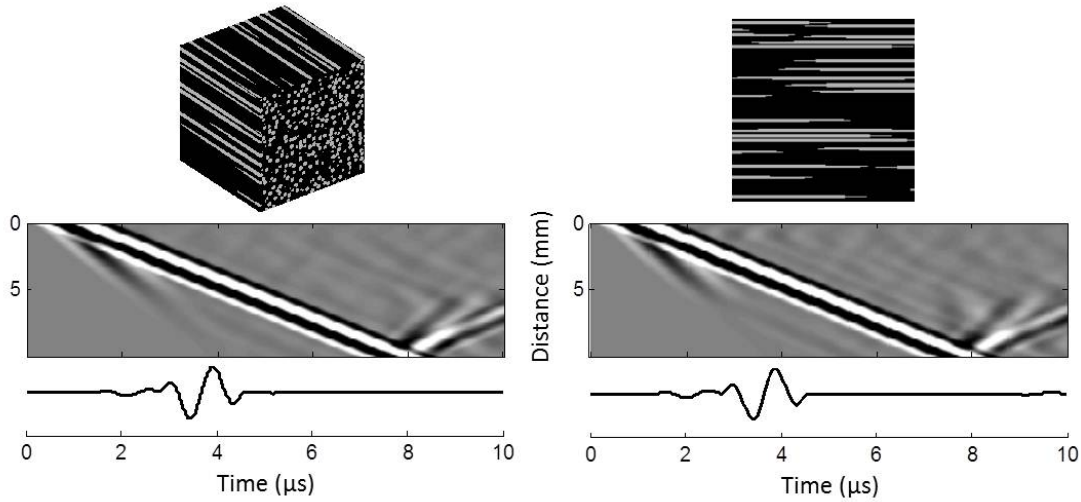


FIGURE 4.7. – Propagation suivant la direction privilégiée dans un milieu de fraction solide $\phi_s = 0.8$ (typique de l'os trabéculaire) constitué de très longues ellipses ($a = 3$ mm) avec condition d'exclusion. À gauche la version tridimensionnelle. À droite, le résultat 2D. Sont représentés le diagramme distance-temps ainsi que le signal enregistré à une distance de propagation de 6 mm.

Ellipses allongées non connectées

Pour comprendre si le paramètre pertinent est bien la connectivité, une nouvelle simulation est menée. Elle consiste à allonger les diffuseurs, de telle sorte que le demi-grand axe vaut maintenant $a = 3$ mm (contre $a = 0,35$ mm précédemment), les demi-petits axes restant inchangés. Une exclusion est une nouvelle fois imposée entre ces diffuseurs, mais la fraction solide ayant été fixée à 80%, pour se rapprocher de la réalité osseuse, la simulation a pu être menée à la fois à deux et à trois dimensions. La figure 4.7 illustre le résultat obtenu dans les deux cas. Contrairement à ce que la simulation précédente aurait pu laisser penser, il y a bien deux ondes qui se propagent dans ce milieu, alors même qu'il n'y a pas de connectivité entre les diffuseurs et qu'avec la fraction solide utilisée ici, il était difficile d'observer deux ondes dans le cas des ellipses plus courtes. Une telle structure ne pourrait pas exister physiquement, aussi il est difficile de parler de module du squelette sec dans ce cas, mais on peut de ce fait considérer qu'il est nul. Il y a donc visiblement une contradiction avec ce que prédit la théorie de Biot. À noter que la simulation à 2D donne encore une fois qualitativement le même résultat sur l'observation des deux ondes.

4.2.4. Percolation

D'après la théorie de Biot, lorsque le squelette n'est pas consolidé, la deuxième onde disparaît (§1.3.4). Une façon de tester si le squelette est consolidé ou non serait d'étudier la propagation dans le squelette sec. C'est ce qui sera fait par la suite (figure 4.10), permettant ainsi de déterminer le module du squelette sec.

Une autre façon de voir les choses est de tester la percolation de la phase solide, c'est-à-dire d'examiner si l'on peut tracer un chemin allant d'un bord à l'autre de l'échantillon sans sortir de la phase solide. L'avantage d'un échantillon numérique est qu'il est facilement possible de tester la percolation de la phase solide. La référence [57] décrit justement un algorithme permettant d'effectuer ce test pour une carte à deux dimensions. Cette méthode a ensuite été transposée à trois dimensions pour s'appliquer à nos milieux. Brièvement, le principe consiste à identifier et

numéroter tous les amas solides de la carte, un amas étant constitué de tous les points de la phase solide qui sont adjacents. Un test est effectué pour chaque point solide afin de déterminer à quel amas il appartient. Ce test peut avoir trois conséquences : augmenter le nombre de points dans un amas, créer un nouvel amas, ou regrouper plusieurs amas. Chaque itération est donc susceptible de redéfinir les amas. Une fois le test sur tous les points terminés, il ne reste plus qu'à tester si au moins un amas s'étend d'un bord à l'autre de la carte pour savoir s'il y a percolation de la phase solide.

Derrière l'idée de percolation se tient la notion de transition de phase. Cela pourrait avoir du sens, car il y a effectivement deux régimes de propagation, un à une onde et un autre à deux ondes. Néanmoins, l'idée de transition de phase suppose un changement brutal de régime qui semble en contradiction avec ce qui est observé sur la figure 4.5 par exemple où le passage d'une à deux ondes en fonction de la direction de propagation apparaissait plutôt continu. Mais surtout, il est en contradiction avec les résultats obtenus pour les ellipses longues ($a = 3\text{ mm}$) avec condition d'exclusion, puisque malgré l'absence de percolation de la phase solide, deux ondes sont bel et bien observées. Ce n'est donc pas directement la percolation telle qu'elle est définie ici qui est un paramètre pertinent.

4.2.5. Propriétés mécaniques des phases

Étudier l'influence des propriétés mécaniques de chacune des phases est facile à faire numériquement, alors que ce serait au contraire particulièrement complexe à mettre en place expérimentalement. Dans toutes les simulations qui vont être présentées ici, la carte utilisée est la même, seules les propriétés de chacune des phases sont modifiées. La carte utilisée est celle de la simulation référence, soit une fraction solide de 50%, et la propagation se fera uniquement selon la direction privilégiée.

Inversion des propriétés des deux phases

La modélisation basée sur la distribution aléatoire d'ellipsoïdes solides dans un fluide découle de la volonté de modéliser les travées osseuses orientées selon une direction privilégiée. Néanmoins, la démarche inverse consistant à distribuer des ellipsoïdes de fluide dans une matrice d'os pourrait décrire plus fidèlement la réalité osseuse. D'un point de vue numérique, il est très facile de passer d'un modèle à l'autre en inversant les propriétés de chacune des phases. La figure 4.8 compare les diagrammes obtenus dans les deux cas de figure. D'un point de vue purement qualitatif, le résultat est le même dans les deux cas : il y a propagation des deux ondes longitudinales. En regardant un peu plus en détail les diagrammes, les vitesses semblent également assez similaires (pentes identiques), en revanche l'atténuation de l'onde rapide est clairement plus faible dans le deuxième cas. D'autres simulations non présentées ici ont également montré que l'influence de la fraction solide et de l'anisotropie est la même dans les deux cas. Nous avons donc choisi de garder le modèle avec les ellipsoïdes solides, qui a l'avantage de nous permettre de lui appliquer par la suite l'Independent Scattering Approximation plus facilement.

Propriétés élastiques de la phase solide

Le paramètre que nous allons faire varier ici est le module de cisaillement μ de la phase solide. La question est la suivante : que se passe-t-il lorsque la phase solide devient fluide ($\mu = 0$) ? Afin de garder la même rupture d'impédance entre les deux phases pour les ondes longitudinales, le premier coefficient de Lamé λ est modifié de telle sorte que le module de compression $\lambda + 2\mu$ reste identique. La figure 4.9 montre la différence de propagation selon que les diffuseurs sont élastiques ou fluides. Les deux ondes observées lorsque les ellipsoïdes sont élastiques disparaissent lorsqu'ils deviennent fluides. Le caractère élastique est donc essentiel à l'observation des

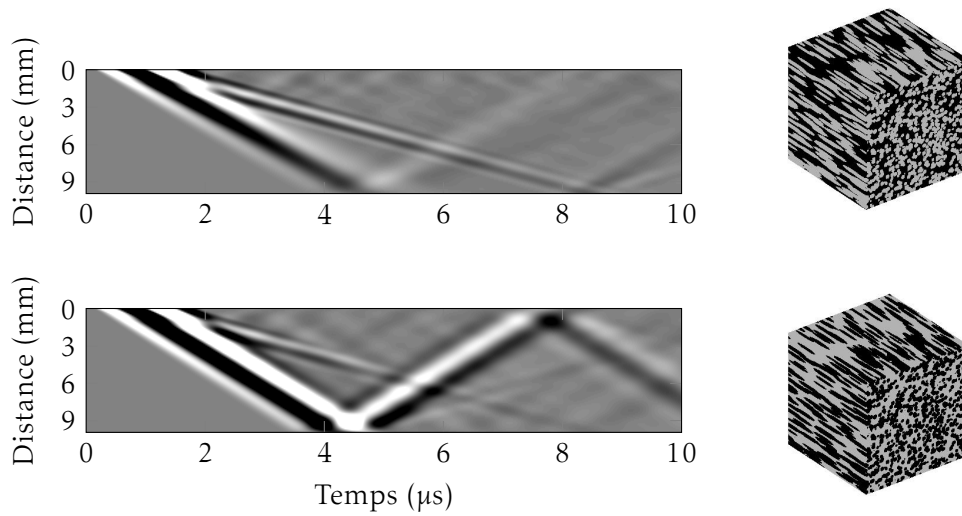


FIGURE 4.8. – Simulation de référence (haut) comparée à une simulation pour laquelle les propriétés des deux phases sont inversées (bas).

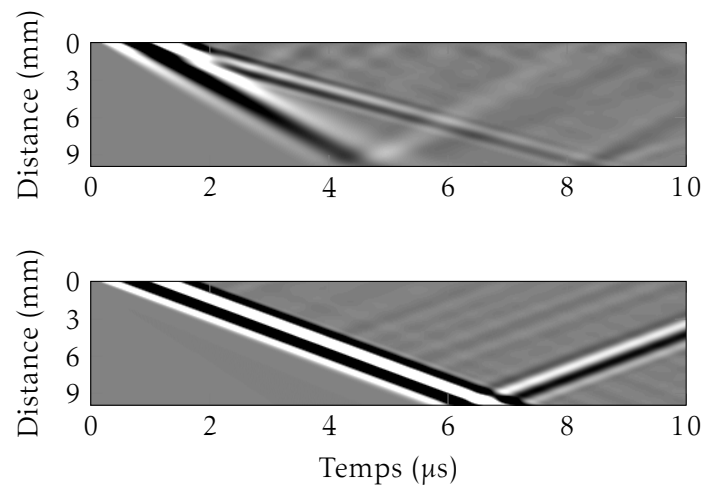


FIGURE 4.9. – Influence du caractère élastique des diffuseurs. En haut, la simulation référence, pour laquelle les diffuseurs sont élastiques (vitesses dans la phase solide : $c_L = 4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, $c_T = 1,8 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$). En bas, les diffuseurs sont fluides, tout en gardant le même module de compression que pour la simulation référence (vitesses dans la phase solide : $c_L = 4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, $c_T = 0 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$).

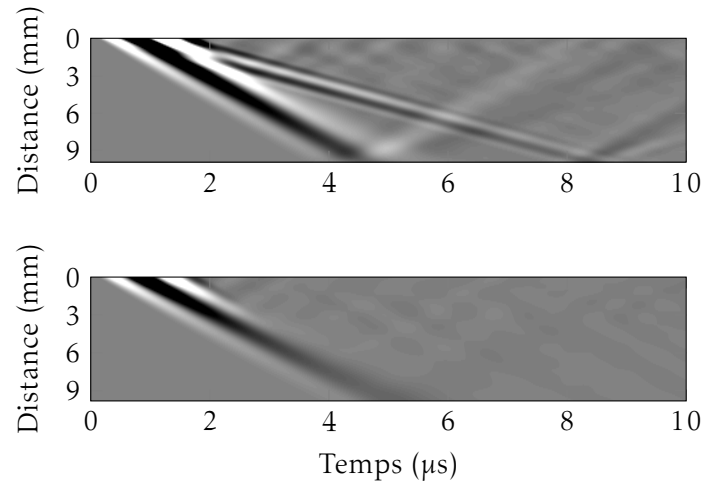


FIGURE 4.10. – Propagation dans le squelette sec (bas) comparée à la propagation dans le milieu poreux (haut).

deux ondes. Au passage, les pentes des différents fronts d'onde montrent que la vitesse de l'onde unique se situe entre celles des ondes rapide et lente du milieu fluide/solide.

Densité du fluide nulle : squelette sec

Nous avons vu dans le premier chapitre (§1.3.3) que les coefficients élastiques du milieu poreux peuvent s'écrire en fonction du module du squelette sec. Ce squelette sec correspond au milieu poreux pour lequel le fluide serait remplacé par du vide. Cette expérience de pensée est tout à fait réalisable numériquement, il suffit pour cela de fixer la densité du fluide à zéro³. Dans ce cas, la propagation n'a lieu que dans la phase solide.

La figure 4.10 compare la propagation dans le milieu poreux de référence à la propagation dans le squelette sec. On constate qu'une seule onde se propage dans le squelette sec. Information intéressante, **la vitesse de cette onde semble quasiment identique à celle de l'onde rapide dans le milieu référence**. La possibilité de simuler la propagation dans le squelette sec sera très utile par la suite pour déterminer le module du squelette sec (§4.3.1).

Squelette immobile

Dans la même idée que la simulation de la propagation à travers le squelette sec, il est possible d'effectuer une simulation dans un milieu avec un squelette immobile. Cette fois-ci, la propagation n'a donc lieu que dans la phase fluide. Cela revient à fixer $\rho_s = +\infty$. Le résultat est donné sur la figure 4.11. Là encore, à l'instar de la propagation uniquement dans la phase solide, une seule onde est observée. La vitesse de cette onde est proche de la vitesse de l'onde lente dans le milieu poreux, bien que légèrement plus élevée.

Sous l'hypothèse stiff frame, comme $\rho_s = +\infty$, la vitesse de l'onde rapide s'annule (équation 1.3.29), seule reste l'onde lente dont la vitesse est égale à la vitesse dans le fluide divisée par la racine carrée de la tortuosité (équation 1.3.30). Les formules semblent donc compatibles avec ce qui est observé ici. Comme la simulation précédente, pour l'estimation du squelette sec, cette

3. Une légère adaptation dans la réalisation des simulations est cependant nécessaire, car il n'est plus possible d'émettre l'onde plane dans la fine couche de fluide placée devant le milieu (§A.2) comme c'était le cas précédemment. C'est donc directement au contact du milieu qu'une onde plane de contrainte de compression est émise.

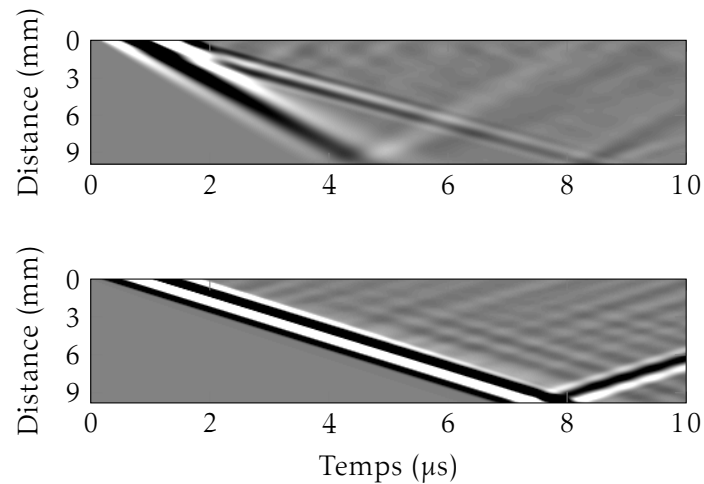


FIGURE 4.11. – Propagation dans un milieu au squelette immobile (bas) comparée à la propagation dans le milieu poreux (haut).

simulation sera très utile par la suite (§1.3.4) pour donner une valeur de la tortuosité dans le milieu.

4.2.6. Composition des ondes rapide et lente

Répartition des ondes lente et rapide dans chacune des phases

Les deux simulations précédentes (squelette sec et squelette immobile) pourraient laisser penser que l'onde rapide se propage dans la phase solide, tandis que l'onde lente se propage dans la phase fluide. Pour voir plus précisément ce qu'il en est, il est possible numériquement d'enregistrer spécifiquement la composante dans le solide ou dans le fluide lors de la propagation dans le milieu poreux. Dans cette optique, la figure 4.12 montre la propagation dans le milieu référence lorsqu'à chaque distance de propagation le signal est intégré sur tout le plan transverse (haut), seulement sur la partie fluide (milieu) ou seulement sur la partie solide (bas). Dans les trois cas, deux ondes longitudinales sont observées. Autrement dit, **chacune des deux ondes se propage à la fois dans la phase solide et dans la phase fluide**. Chaque onde n'est donc pas uniquement associée à une phase. En revanche, la composante dans le fluide est majoritaire pour l'onde lente, et la composante dans le solide est majoritaire pour l'onde rapide.

Là encore, ces résultats sont compatibles avec la théorie de Biot, qui prévoit effectivement que les deux ondes se propagent dans les deux phases. La théorie de Biot va plus loin : l'onde rapide correspond à des composantes dans le solide et dans le fluide en phase, alors que pour l'onde lente elles sont en opposition de phase [10]. Nous allons donc maintenant chercher à déterminer ces déphasages dans nos modèles pour savoir s'ils suivent bien ces prédictions.

Déphasage des composantes dans le solide et dans le fluide pour les deux ondes

Le déphasage des composantes dans le fluide et dans le solide est calculé pour deux milieux, de fraction solide 50% (la référence depuis le début du chapitre) et 70%. Ce deuxième milieu, pour lequel l'observation des deux ondes est plus délicate, permet de s'assurer que le cas particulier d'une proportion identique de fluide et de solide ne crée pas un biais sur l'observation des déphasages. Les signaux utilisés sont ceux obtenus à une distance de propagation de 4 mm, qui est un bon compromis entre une bonne séparation des deux ondes et un niveau de signal pas trop atténué ni perturbé par les réflexions. De la même façon que précédemment, le signal est intégré soit sur

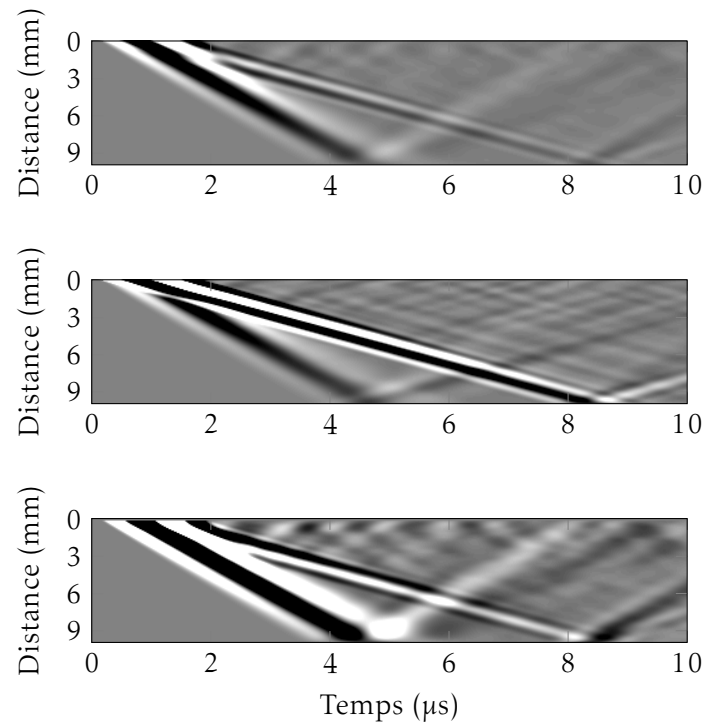


FIGURE 4.12. – Propagation dans le milieu référence (50% de solide, propagation selon la direction privilégiée). En haut, le signal est intégré à chaque distance sur tout le plan transverse. Au centre, le signal est seulement intégré sur les parties fluides du plan transverse. En bas, le signal est seulement intégré sur les parties solides du plan transverse.

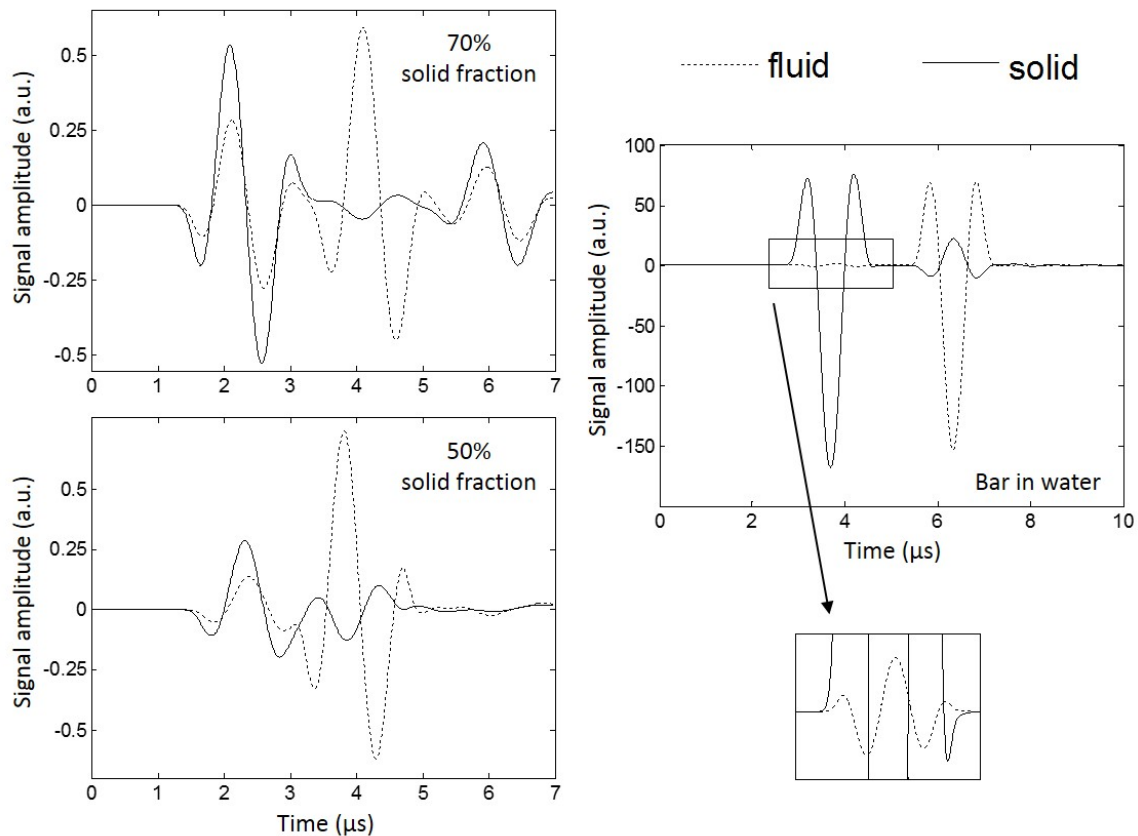


FIGURE 4.13. – Composantes dans le fluide et dans le solide obtenues après 4 mm de propagation dans deux échantillons de fractions solide 70% (haut à gauche) et 50% (bas à gauche). À titre de comparaison, les composantes dans chaque phase pour le cas du guide d'onde élastique (section carrée de $100\mu\text{m}$ de côté) dans un fluide, pour une distance de propagation de 8 mm, sont également représentées (droite).

les parties solides uniquement, soit sur les parties fluides uniquement, ce qui permet d'obtenir la composante dans chacune des phases⁴. La figure 4.13 représente les composantes dans chacune des phases pour les échantillons de fractions solides différentes. La différence de déphasage entre onde lente et onde rapide apparaît nettement. Pour les deux fractions solides l'onde rapide semble en effet correspondre à des composantes en phase tandis que l'onde lente correspond plutôt à une opposition de phase. Pour quantifier ces déphasages, ondes rapide et lente sont isolées dans les deux cas, et un produit scalaire est effectué entre les composantes dans le solide et dans le fluide.

À titre de comparaison, le déphasage entre les composantes dans chaque phase est également étudié dans un troisième milieu (droite). Il est simplement constitué d'une barre élastique (section carrée de $100\mu\text{m}$ de côté) entourée de fluide. Les caractéristiques d'émission et de réception sont les mêmes que pour les autres milieux, si ce n'est que pour une meilleure séparation, la distance de propagation est de 8 mm. Le choix de ce milieu est motivé par les résultats précédents, qui semblent indiquer que l'onde rapide pourrait être guidée par l'anisotropie de la phase solide (ellipsoïdes dans le cas de notre modèle, travées dans l'os).

Les valeurs obtenues sont les suivantes :

4. Une variante consistant à ne considérer que les signaux de part et d'autre des interfaces fluide/solide a également été testée : aucune différence significative n'a été observée.

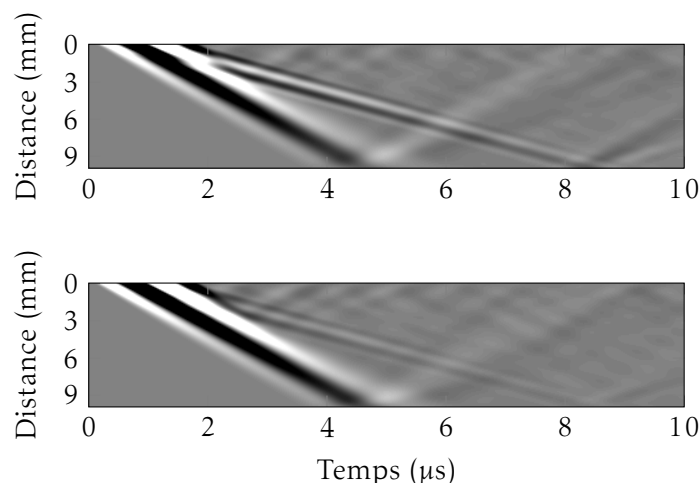


FIGURE 4.14. – Propagation dans le milieu référence (50% de solide, propagation selon la direction privilégiée) sans (haut) et avec (bas) une couche d'os de $60\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur de chaque côté du milieu.

	Onde rapide	Onde lente
milieu poreux $\phi_s = 0.5$	10°	174°
milieu poreux $\phi_s = 0.7$	19°	163°
barre	131°	177°

Ce tableau confirme l'impression visuelle : pour les deux milieux poreux les composantes sont plutôt en phase dans le cas de l'onde rapide, et en opposition de phase dans le cas de l'onde lente. Néanmoins, dans les deux cas il ne s'agit pas d'ondes parfaitement en phase ou parfaitement en opposition de phase, il y a un déphasage supplémentaire. La théorie de Biot au sens strict est donc prise à défaut. Cela suggère que la limite de validité de cette théorie est atteinte : nous ne sommes plus en régime basse fréquence. Dès lors les résultats prévus par la théorie de Biot sont à prendre avec précaution.

Les déphasages dans le cas de la barre élastique montrent également un résultat contrasté. Alors que le déphasage dans le cas de "l'onde lente" (la deuxième arrivée) est proche de l'opposition de phase, à un léger déphasage près, pour l'onde rapide en revanche la valeur obtenue ne correspond à rien de particulier.

4.2.7. Bords solides

Pour terminer cette étude qualitative, il est intéressant de voir ce qui se passe lorsque de part et d'autre du milieu sont placées des plaques de solides. La question mérite en effet d'être posée puisque des expériences passées ont montré qu'une seule onde était observée lors de la propagation dans un milieu poreux dont les bords ont été fermés, alors que deux ondes sont observées sans ces bords [58]. Dans ce cas, l'étude de la propagation des deux ondes n'aurait que peu d'utilité pour l'os trabéculaire *in vivo*, nécessairement recouvert d'une couche d'os cortical.

La figure 4.14 illustre ce que devient la propagation dans le milieu référence lorsqu'une couche d'os de $60\text{ }\mu\text{m}$ est ajoutée à l'entrée et à la sortie du milieu. Les deux diagrammes sont très similaires, et en tout cas deux ondes sont bel et bien observées même avec la présence d'une couche d'os "cortical" de chaque côté du milieu⁵. Les vitesses de chacune des deux ondes semblent même

5. En réalité la couche d'os placée à la sortie du milieu n'a que très peu d'incidence sur les diagrammes observés (seulement sur les ondes réfléchies) puisque les signaux sont enregistrés à l'intérieur du milieu.

très peu affectées, puisque les pentes ont l'air similaires. En revanche, l'onde lente est visiblement beaucoup plus faible lorsque les couches d'os sont présentes.

Cette différence d'amplitude peut s'expliquer par des questions d'adaptation d'impédance. En effet, nous l'avons vu juste avant, l'onde lente se propage majoritairement (bien que non exclusivement) dans le fluide. Sans la couche d'os, l'adaptation d'impédance se fait donc plutôt bien entre l'onde qui est émise dans le fluide et l'onde lente. En revanche, cette adaptation d'impédance est beaucoup moins bonne avec la couche d'os, ce qui se traduit nécessairement par une amplitude transmise plus faible. C'est au contraire l'onde rapide qui est renforcée dans ce cas. Cela, couplé avec le fait que la fraction solide de l'os trabéculaire est faible, explique aussi pourquoi dans les expériences *in vitro* l'onde lente a une amplitude souvent beaucoup plus grande que l'onde rapide [16]. La présence de la couche corticale autour de l'os trabéculaire est donc un avantage pour des études cliniques fondées sur la propagation des deux ondes, puisqu'elle permet de renforcer l'onde rapide, très faible sinon.

4.2.8. Premières conclusions de l'étude qualitative

Cette première étude, qualitative, a déjà permis de valider l'utilité d'un modèle numérique simple pour comprendre la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire, et notamment les conditions d'apparition de deux ondes. Des différences ont cependant été observées, à l'image de la fraction solide nécessaire pour observer deux ondes, qui n'est pas totalement en adéquation avec la fraction solide de l'os trabéculaire.

À partir de ce modèle et grâce à la souplesse de l'outil numérique, nous avons pu tester l'influence de nombreux paramètres qu'il aurait été très difficile, voire impossible, de faire varier expérimentalement. Il convient maintenant de tirer des conclusions globales à partir des résultats présentés ici. Pour observer deux ondes dans les modèles numériques étudiés, il faut :

- que la fraction solide ne soit ni trop fragile ni trop élevée
- que la propagation ait lieu dans le direction d'alignement des diffuseurs
- que la phase solide puisse propager le cisaillement
- que la continuité de la phase solide soit "suffisante" le long de la direction de propagation

Toutes ces conditions réunies s'accordent avec l'hypothèse que **l'onde rapide pourrait être une onde guidée** par les travées osseuses (les ellipsoïdes dans le cas des modèles), alors que l'onde lente se propagerait essentiellement dans le fluide.

Ce n'est pas nécessairement contradictoire avec la théorie de Biot. Concernant cette théorie, l'accord qualitatif avec les simulations est mitigé. Plusieurs observations sont compatibles avec cette théorie, mais elle échoue à expliquer certains résultats (deux ondes pour les ellipses longues non connectées, déphasage entre fluide et solide). Cela laisse penser que la limite de validité de la théorie de Biot est atteinte pour ces milieux numériques, et donc *a fortiori* pour l'os trabéculaire si le modèle est suffisamment fidèle. Le fait que certains résultats restent valables font penser que la théorie de Biot pourrait être un cas particulier d'une théorie plus globale qui expliquerait la propagation dans l'os trabéculaire.

Pour compliquer encore un peu plus l'interprétation, il n'est pas exclu qu'il y ait plusieurs origines physiques différentes à la propagation de deux ondes. En effet, deux ondes longitudinales ont été observées dans des suspensions de billes de plastique (PMMA) dans l'eau [36]. Dans ce cas la théorie de Biot ne prévoit pourtant qu'une seule onde, puisque le squelette est non consolidé (§1.3.4). Elle est donc prise à défaut. Néanmoins, pour cette expérience, l'onde lente résultait d'un couplage résonant entre les diffuseurs, permettant à une onde de surface (type Stoneley) de se propager de diffuseur en diffuseur. L'existence de cette onde est alors confinée à une plage de fréquence très étroite. Ce n'est pas ce qui est observé dans nos milieux numériques et dans l'os trabéculaire d'une manière générale, pour lesquels la nature des deux ondes est donc plus vraisemblablement la même que dans la théorie de Biot. De même, d'un point de vue purement

théorique, la possibilité d'une deuxième onde cohérente a déjà été mentionnée dans les milieux multiplement diffusants constitués de cylindres [59], l'équation de dispersion pouvant parfois présenter plusieurs solutions pour le nombre d'onde.

La prochaine partie, qui s'intéresse de façon plus précise aux vitesses et coefficients d'atténuation, permettra de voir si les premières intuitions apportées par l'étude qualitative se confirment.

4.3. Étude quantitative

L'idée de cette étude quantitative est de déterminer vitesses et coefficients d'atténuation dans les modèles numériques, pour ensuite les mettre à l'épreuve des deux familles de théories développées dans les premiers chapitres : les théories d'ondes en milieux poreux et les théories de diffusion multiple. Pour cela seront prises en compte les théories de Wood et de Biot côté théories de milieux poreux, et l'Independent Scattering Approximation (ISA) qui est la plus simple des théories de diffusion. Deux cas sont distingués, selon qu'une ou deux ondes ont été observées dans le milieu.

4.3.1. Détermination des vitesses et coefficients d'atténuation

Avec un signal d'émission de fréquence centrale 1 MHz et de bande passante d'environ 100%, les fréquences étudiées sont comprises entre 0.5 et 1,5 MHz. Autre point, les signaux étudiés ne sont que des *estimations* de l'onde cohérente, puisque la moyenne n'est obtenue qu'à partir d'un nombre fini de réalisations. En conséquence, il reste une partie incohérente dans le signal, majoritairement après les arrivées balistiques des deux ondes. Les ondes sont donc isolées à l'aide d'une combinaison de fenêtres rectangulaires et de fenêtre de Hann (pour limiter autant que possible la création de fréquences perturbatrices).

Comme le signal transmis à l'intérieur du milieu est enregistré pour différentes profondeurs, nous avons accès à une matrice de signaux $s(t, z)$. Une transformée de Fourier numérique de chaque colonne donne alors une nouvelle matrice $\tilde{s}(\omega, z)$. Une ligne notée $\tilde{s}_\omega(z)$ de cette matrice correspond à la composante de fréquence angulaire ω du signal en fonction de la distance de propagation z .

La phase "déroulée" $\varphi_\omega(z)$ de $\tilde{s}_\omega(z)$ s'écrit :

$$\varphi_\omega(z) = \arg(\tilde{s}_\omega(z)) = \varphi_\omega(0) + k_r(\omega)z \quad (4.3.1)$$

La pente de $\varphi_\omega(z)$ est donc le nombre d'onde $k_r(\omega)$, ce qui donne accès à la vitesse de phase $v(\omega)$:

$$v(\omega) = \frac{\omega}{k_r(\omega)} \quad (4.3.2)$$

Le module $|\tilde{s}_\omega(z)|$, sous l'hypothèse d'une décroissance exponentielle du signal, donne cette fois accès au coefficient d'atténuation du signal k_i :

$$|\tilde{s}_\omega(z)| = e^{-k_i(\omega)z} \quad \text{ou encore} \quad \ln|\tilde{s}_\omega(z)| = -k_i(\omega)z \quad (4.3.3)$$

Autrement dit, le coefficient d'atténuation est l'opposé de la pente de $\ln|\tilde{s}_\omega(z)|$. Au passage, si l'on se ramène aux définitions du chapitre 2, comme la diffusion est la seule source d'atténuation possible ici (onde plane, pas d'absorption), longueur caractéristique d'atténuation et libre parcours moyen l_e sont confondus. Ainsi, l'équation 2.1.2 devient

$$l_e = \frac{1}{2k_i} \quad (4.3.4)$$

Application des théories de Wood, de Biot, et de l'ISA

Formule de Wood

La formule de Wood concerne uniquement la vitesse dans le milieu. Elle est relativement simple à mettre en place ici puisque tous les paramètres de la formule, équation 1.2.4, sont connus (masses volumiques et modules de compression des deux phases, et fraction solide). Pour rappel les propriétés des phases sont données dans l'annexe A.1.2.

Théorie de Biot

La théorie de Biot est plus complexe à utiliser du fait de ses nombreux paramètres. Nous nous restreindrons ici à la théorie de Biot haute fréquence. Dans la mesure où le fluide est parfait (aucun terme de viscosité dans l'équation résolue numériquement par SimSonic), il ne s'agit même pas d'une hypothèse. Quel que soit le milieu numérique étudié ici, **l'atténuation prédite par la théorie de Biot est donc nulle.**

Pour ce qui est des vitesses, nous avons vu au premier chapitre qu'elles dépendaient des paramètres suivants : K_f , K_s , ρ_f , ρ_s , ϕ_s , N , α , K_{sec} . Les 5 premiers sont connus puisque fixés à la création de la carte. Concernant les trois derniers paramètres, tout l'intérêt du modèle numérique est de chercher à les obtenir de façon indépendante, sans procéder à des ajustements à multiples paramètres comme c'est le cas habituellement dans les expériences menées sur l'os trabéculaire. Pour cela, trois simulations supplémentaires sont nécessaires.

La première consiste à propager une onde de cisaillement dans le milieu, afin d'en déduire la vitesse de l'onde de cisaillement, qui d'après l'équation 1.3.19 dépend des paramètres N et α . Les deux autres simulations ont été vues précédemment (figures 4.10 et 4.11), il s'agit des simulations dans les milieux squelette sec et à squelette immobile. Pour ces deux cas particuliers, l'hypothèse stiff frame (§1.3.4) $K_{sec} \gg K_f$ et $N \gg K_f$ est raisonnable. La vitesse de l'onde observée sera donnée par la formule 1.3.31 de l'onde rapide pour le squelette sec et celle de l'onde lente (équation 1.3.30) pour le squelette immobile, la vitesse de l'autre onde s'annulant pour chacun de ces cas particuliers.

L'ensemble des trois simulations fournit un système à trois équations et trois inconnues, donc la théorie de Biot peut être appliquée **sans aucun ajustement de paramètres**⁶. Les vitesses qui permettent d'établir ce système sont déterminées en prenant la pente du front d'onde sur les diagrammes bi-dimensionnels, à l'image de ce qui a déjà été fait dans le chapitre 1. Cela suppose que ces milieux soient peu dispersifs, ce que semblent effectivement montrer les figures 4.10 et 4.11. D'ailleurs, les coefficients élastiques et la tortuosité, tel qu'ils ont été définis, sont des paramètres en théorie indépendants de la fréquence. Les expressions des vitesses ne prévoient donc pas de dispersion.

Si tous les paramètres sont obtenus indépendamment, la façon dont ils sont obtenus suppose malgré tout que les équations de Biot sont valables. Ce n'est donc pas une méthode parfaitement rigoureuse pour valider la théorie de Biot dans le cas de notre modèle. D'autres méthodes pourraient être envisagées pour déterminer les trois paramètres. Pour la tortuosité, à l'image de la percolation discutée précédemment, elle peut être calculée à l'aide d'un algorithme, de façon totalement indépendante de la théorie de Biot. La référence [18] détaille à ce propos un algorithme, que nous avons testé. Il consiste à établir la distance géodésique depuis le bord de la carte en chaque point du fluide, à l'aide d'une méthode itérative. Il y a cependant un point à éclaircir, celui de la définition de la tortuosité dans le cadre de la théorie de Biot qui, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (§1.3.3), n'est pas si claire. D'autre part, il semble y avoir un biais dans

6. À titre informatif, si l'hypothèse stiff frame est vérifiée pour le milieu poreux, la simulation de la propagation de l'onde de cisaillement à travers le milieu n'est pas nécessaire. Il n'y a en effet que deux paramètres inconnus qui sont v_{sec}^L et α (équation 1.3.32)

les résultats donnés par cette méthode, puisque le calcul de la distance géodésique de proche en proche est incompatible avec la notion de distance "la plus courte", qui suppose une connaissance *a priori* du milieu. En conséquence cette distance est surestimée, et il en est de même pour la tortuosité. Effectivement, en supposant que la tortuosité considérée dans la théorie de Biot est le carré du rapport entre distances géodésiques et euclidiennes⁷, les quelques tests réalisés ont montré une tortuosité systématiquement surestimée par l'algorithme par rapport à celle déduite de la propagation dans le milieu squelette immobile.

Independent Scattering Approximation

Les hypothèses et paramètres d'entrée de cette théorie ont déjà été développés au paragraphe 2.4. Parmi ces paramètres d'entrée se trouve la densité de diffuseurs, qui vaut ici

$$n = \frac{\phi_s}{\frac{4}{3}abc} \quad (4.3.5)$$

avec a , b et c les demi-axes de l'ellipsoïde. L'autre paramètre nécessaire pour appliquer l'ISA est l'amplitude de l'onde diffusée vers l'avant d'un diffuseur unique. Cette valeur a été obtenue par simulation, selon la méthode décrite en annexe (A.4.1 et A.4.3).

4.3.2. Cas de la propagation d'une seule onde : propagation perpendiculaire à la direction privilégiée

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas, plus simple, où une seule onde est observée. Comme nous l'avons vu précédemment, cela correspond à une propagation perpendiculaire à la direction privilégiée. La figure 4.15 montre les vitesses et coefficients d'atténuation pour trois milieux de fraction solide 10%, 30% et 50%. Pour le coefficient d'atténuation, deux échelles sont données, en mm^{-1} , unité classique en physique (axe de gauche), et en $\text{dB} \cdot \text{cm}^{-1}$, unité souvent utilisée dans le cadre de l'os trabéculaire. Les observations sont comparées aux prédictions de l'ISA, ainsi qu'aux théories de Wood et de Biot pour ce qui est des vitesses.

Avant de nous intéresser aux prédictions des différentes théories, voyons les principales caractéristiques des observations. Côté vitesses, dans les trois cas il apparaît une légère dispersion négative. C'est très intéressant, car de la dispersion négative a également été observée dans l'os [60]. Cela signifie que notre modèle pourtant simplifié reproduit également cet aspect de l'os trabéculaire. La vitesse est dans les trois cas plus rapide que celle dans le fluide, et elle augmente avec la fraction solide. Côté atténuation, on peut déjà constater qu'elle est non nulle. Tout comme pour l'os trabéculaire, la théorie de Biot, qui ne prévoit aucune atténuation lorsque le fluide est parfait, échoue donc à prédire l'atténuation dans ces milieux modèles. Pour autant, en ce qui concerne l'atténuation ces modèles ne reproduisent pas non plus fidèlement l'os trabéculaire, puisqu'il a été reporté des variations linéaires du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence [61, 62]. Ici le coefficient d'atténuation suit plutôt des lois de puissance en fonction de la fréquence, avec des exposants caractéristiques respectivement égaux à 3.4, 2.5 et 2.1 pour 10%, 30% et 50% de fraction solide. La décroissance de l'exposant caractéristique en fonction de la fraction solide est en accord avec les théories de diffusion multiple, qui prévoient que le coefficient d'atténuation varie en ω^4 en régime basse fréquence et en ω^2 en régime haute fréquence. Cela montre les limites de notre modèle, qui n'est bien sûr pas une représentation exacte de l'os trabéculaire. Ces résultats sur l'atténuation suggèrent une nouvelle fois que la diffusion devrait être prise en compte pour l'atténuation de l'os trabéculaire, même si l'ISA, la plus élémentaire des théories de diffusion multiple, ne suffit pas à elle seule à expliquer la dépendance linéaire du coefficient d'atténuation

7. C'est ce que laissait penser la propagation dans le milieu de squelette immobile (§1.3.4)

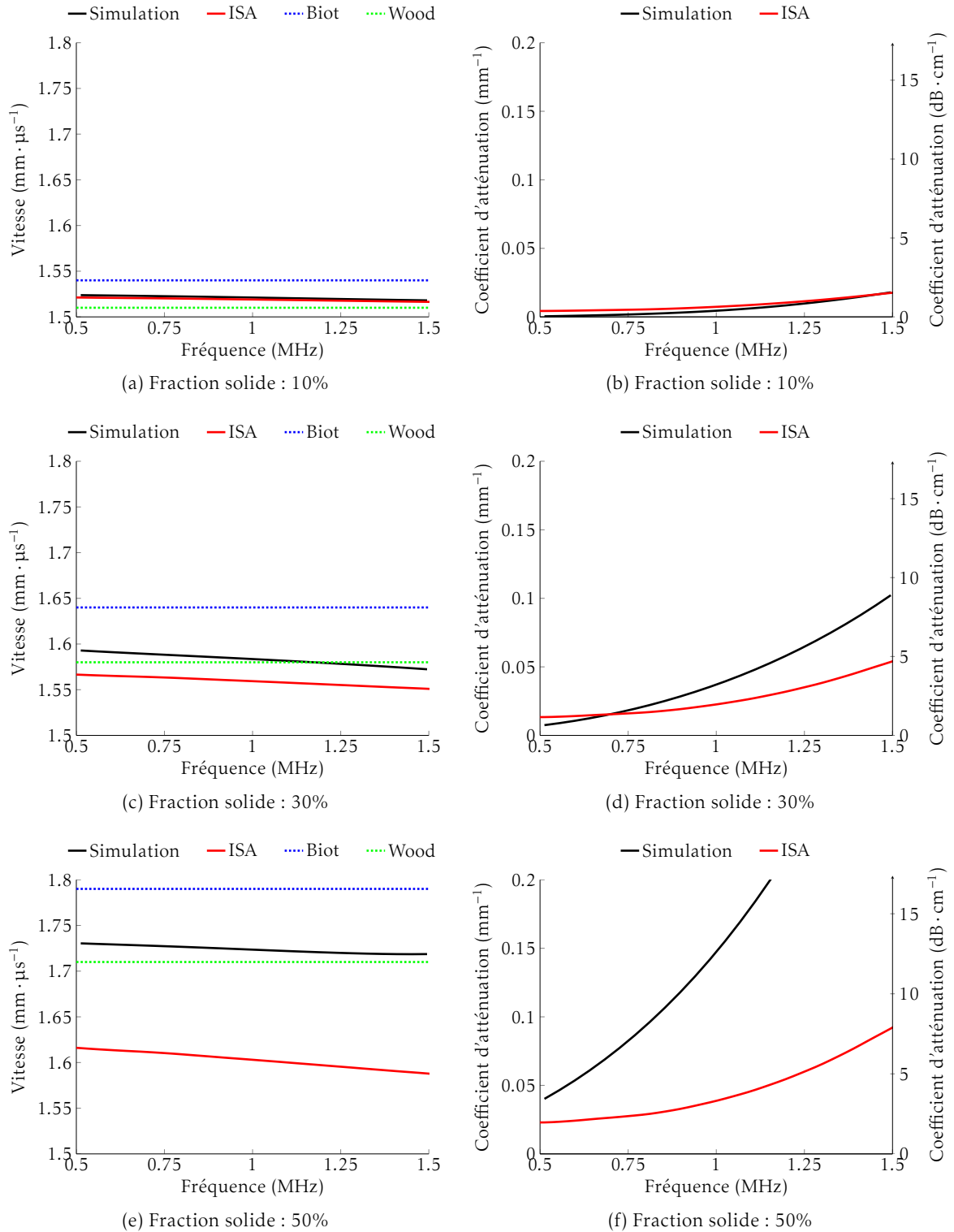


FIGURE 4.15. – Vitesses (gauche) et coefficients d’atténuation (droite) en fonction de la fréquence pour trois configurations où une seule onde est observée. Cela correspond à une propagation perpendiculaire à la direction privilégiée pour des fractions solides de 10% (haut), 30% (milieu) et 50% (bas). Les observations (traits pleins noirs) sont comparées aux prédictions de l’Independent Scattering Approximation (traits pleins rouges), ainsi qu’aux théories de Wood (pointillés verts) et de Biot (pointillés bleus) pour les vitesses. Les vitesses observées décroissent linéairement avec la fréquence, avec des pentes de $-0,006\text{mm}$, $-0,02\text{mm}$ et $-0,013\text{mm}$ respectivement pour 10%, 30% et 50% de fraction solide. Les vitesses prédites par l’ISA montrent également une dispersion négative, avec des pentes respectives de $-0,005\text{mm}$, $-0,016\text{mm}$ et $-0,029\text{mm}$.

en fonction de la fréquence. Sans même évoquée la validité limitée de l'ISA, mentionnons que l'atténuation dans l'os pourrait être due à la fois à la diffusion et à l'absorption [63].

Revenons maintenant aux prédictions des différentes théories. Comme attendu, les prédictions de l'ISA s'éloignent significativement des vitesses et coefficients d'atténuation observés lorsque la fraction solide augmente, soit à 30% et 50%. C'est logique puisque dans ce cas l'hypothèse d'indépendance des diffuseurs n'est plus acceptable. Ce n'est cependant pas forcément un trop gros problème en vue de l'étude de l'os trabéculaire, dont la fraction solide est plus proche du cas à 10%. Justement, pour le milieu de fraction solide 10% l'ISA montre un bon accord à la fois avec la vitesse et le coefficient d'atténuation observés. En particulier, pour ce qui est des vitesses, elle prévoit bien la dispersion négative observée (et ceci même à plus grande fraction solide). C'est un fait intéressant, car intrinsèquement l'ISA ne peut prédire qu'une seule onde. Si tant est que ce résultat est directement transposable à l'os, cela contredirait l'hypothèse selon laquelle la dispersion négative observée dans le cas de la propagation supposée d'une seule onde serait en fait une interférence entre deux ondes de vitesses très proches [64].

Quant à la formule de Wood et la théorie de Biot, elles ne prévoient aucune dispersion puisque tel qu'elles ont été appliquées tous les paramètres sont statiques, ce qui est classique pour des théories basse fréquence. Dans le cas de la théorie de Biot, comme une seule onde est observée, c'est la formule de vitesse du squelette non consolidé (équation 1.3.34) qui a été utilisée, en supposant nulle la vitesse de l'onde lente. L'une comme l'autre des théories donnent une vitesse assez proche de ce qui est observé. En revanche, alors que la théorie de Wood a tendance à sous-estimer la vitesse, la théorie de Biot au contraire la surestime. Comme la valeur donnée par ces théories est une limite basse fréquence et que la vitesse décroît avec la fréquence, la valeur de vitesse prédite par la théorie de Biot semble plus légitime. On pourrait par la suite prendre une valeur de tortuosité dépendante de la fréquence pour tenter de prédire la dispersion observée. Dans la théorie de Johnson-Koplik-Dashen [21] qui découle de la théorie de Biot, la tortuosité dépend effectivement de la fréquence. Néanmoins, cette dépendance fréquentielle n'intervient que lorsque la viscosité du fluide n'est pas nulle, ce qui encore une fois n'est pas le cas ici. D'autre part, rendre ce paramètre dépendant de la fréquence conduit à reconsidérer la définition de la tortuosité donnée dans le premier chapitre, qui fait d'elle un paramètre purement géométrique. Cela pourrait également remettre en cause l'idée de la déduire de la propagation dans le milieu à squelette immobile.

4.3.3. Cas de la propagation de deux ondes : propagation dans la direction privilégiée

Pour étudier le cas d'une propagation de deux ondes, nous allons revenir sur le milieu de référence de l'étude qualitative : fraction solide de 50% et propagation selon la direction privilégiée. Dans ce cas, il faut à la fois fenêtrer les signaux pour isoler l'onde lente de l'onde rapide mais aussi, comme dans le cas précédent, pour enlever toute la partie incohérente restante (et les éventuelles ondes réfléchies). Pour faciliter cette étape, une simulation sur un milieu d'épaisseur double, soit 20 mm, a été réalisée. Les vitesses et coefficients d'atténuation sont représentés sur la figure 4.16. Les vitesses pour l'onde rapide comme pour l'onde lente montrent une dispersion globalement **positive**, contrairement à ce que nous avons vu précédemment dans le cas d'une seule onde. Cela correspond là encore à ce qui est observé dans l'os trabéculaire. Par ailleurs, de façon intéressante la vitesse de l'onde lente est significativement plus faible que la vitesse dans l'eau ($c_0 = 1,5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$). Concernant l'atténuation, elle semble à peu près du même ordre de grandeur pour les deux ondes (et elle est encore une fois non nulle).

Pour ce qui est des prédictions théoriques, ce cas est sans surprise hors de portée de l'ISA. La fraction solide (50%) est bien plus élevée que ce qu'autorise cette théorie, et l'ISA ne prédit qu'une seule onde. Vitesses et coefficients d'atténuation prédits ne correspondent à aucune des deux ondes. De la même façon, la théorie de Wood ne convient pas pour prédire la vitesse de

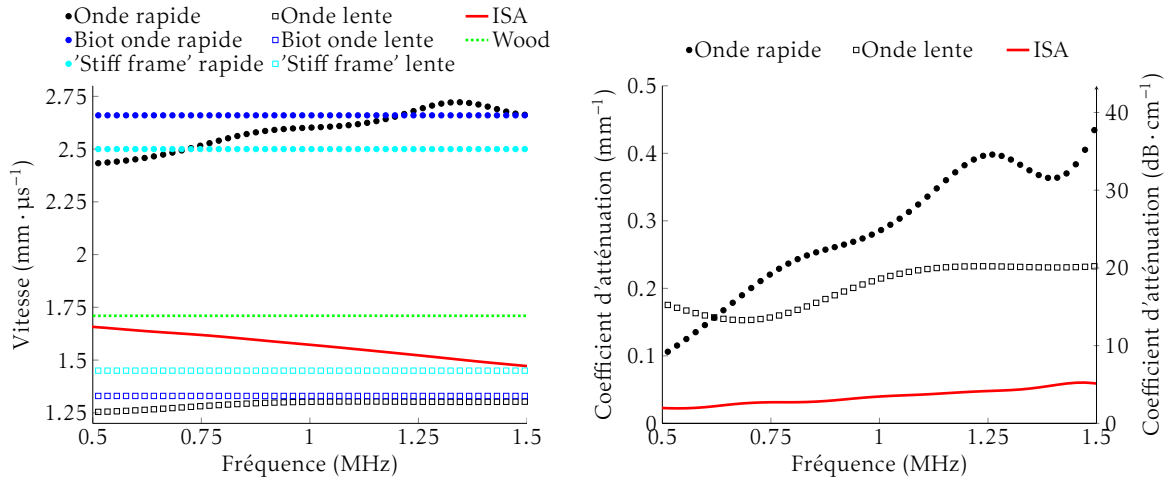


FIGURE 4.16. – Vitesses (gauche) et coefficients d’atténuation (droite) en fonction de la fréquence des deux ondes longitudinales du milieu de référence (propagation dans la direction privilégiée du milieu de fraction solide 50%). Les observations (noir) sont comparées aux prédictions de l’Independent Scattering Approximation (bleu), ainsi qu’aux théories de Wood (vert) et de Biot avec (violet) et sans (rouge) l’approximation stiff frame pour les vitesses.

l’une ou l’autre des deux ondes. La seule théorie adaptée parmi celles étudiées ici est donc la théorie de Biot. Deux jeux de formules peuvent être envisagés : les formules simplifiées avec l’hypothèse stiff frame (équations 1.3.29 et 1.3.30) ou les équations 1.3.15 plus générales. Les deux jeux de formules donnent des résultats significativement différents, les formules plus générales correspondant bien mieux aux observations. Cela montre que l’hypothèse stiff frame n’est dans ce cas pas adaptée, ce qui est confirmé par les valeurs des modules du squelette sec ($K_{\text{sec}} = 5,2 \text{ GPa}$ et $N = 0,6 \text{ GPa}$). La théorie de Biot montre en tout cas un très bon accord, pour ce qui est des vitesses, avec les valeurs observées, hormis le problème de la dispersion déjà discuté juste avant.

Afin de s’assurer que ce bon accord n’est pas une coïncidence pour le milieu référence, la comparaison entre vitesses observées et prédites par la théorie de Biot est étendue à la gamme entière de fraction solide sur la figure 4.17. Comme en dehors du milieu référence il est particulièrement difficile de séparer proprement onde rapide et onde lente (vitesses trop proches), l’estimation de la vitesse de chacune des ondes est ici simplement déduite du calcul de la pente des fronts d’onde. Cela suppose donc que la dispersion n’est pas trop forte pour que la valeur obtenue ait un sens.

Les résultats confirment la première observation de la figure 4.16. Les vitesses données par la théorie de Biot sans l’approximation stiff frame montrent un très bon accord avec ce qui a été observé, en dehors de deux points aberrants qui peuvent être dus à la difficulté rencontrée dans ces cas précis pour reconnaître onde rapide et onde lente, et par la dispersion qui rend la détermination de la vitesse à partir de la pente du front d’onde peu fiable. En dehors de ces deux points, l’application de la théorie de Biot pour la prédiction des vitesses dans ces modèles est donc relativement robuste.

Propagation dans des forêts de barres

Les résultats précédents ont montré que les vitesses des deux ondes semblaient suivre les prédictions de la théorie de Biot. Pour autant, cela n’est pas nécessairement contradictoire avec l’idée, suscitée par l’étude qualitative, que l’onde rapide est guidée par les travées. Afin d’approfondir cette hypothèse, nous avons étudié la propagation dans des milieux constitués de barres élastiques

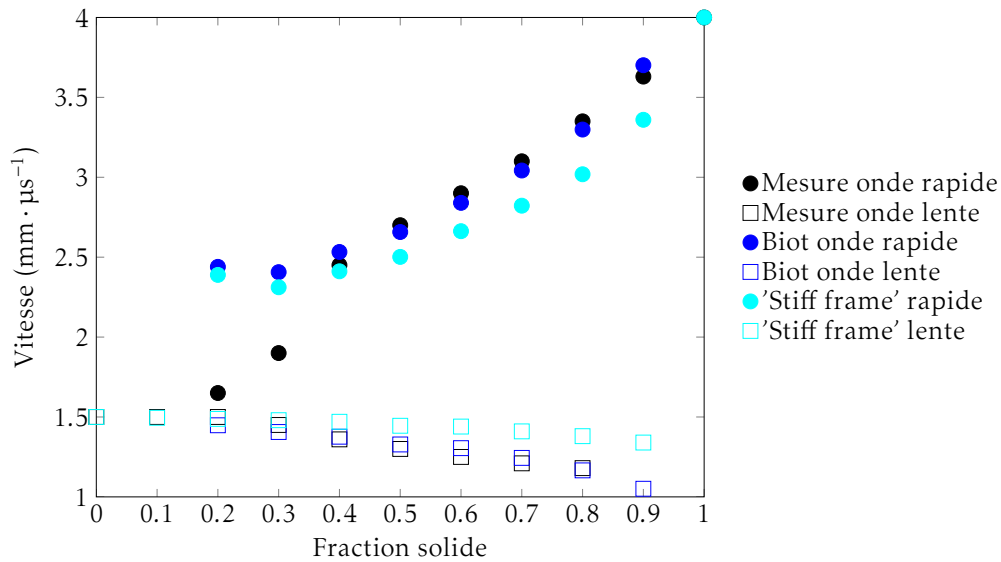


FIGURE 4.17. – Vitesse des ondes rapide et lente observées dans les modèles numériques en fonction de la fraction solide comparées aux prédictions de la théorie de Biot.

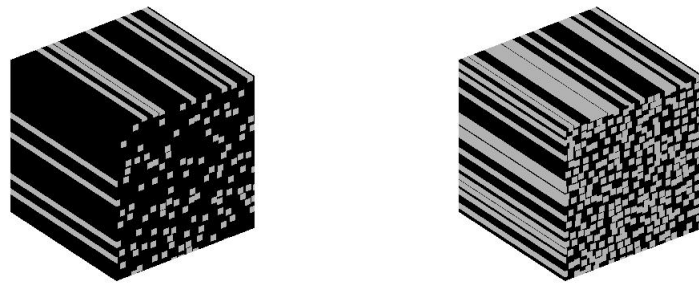


FIGURE 4.18. – Deux exemples de forêts de barres, de fraction solide 20% (gauche) et 50% (droite). En noir, la phase fluide. En gris, la phase solide.

(archétype du guide d'onde) réparties aléatoirement dans le fluide, selon une méthode de Monte Carlo similaire à celle utilisée pour les modèles précédents. La section des barres est un carré de $100\mu\text{m}$ de côté, correspondant au petit axe des ellipsoïdes dans les milieux précédents. Cette dimension est suffisamment petite devant la longueur d'onde dans l'eau ($1,5\text{ mm}$) pour considérer le régime basse fréquence des guides d'ondes [65]. La fraction solide du milieu est déterminée par le nombre de barres élastiques insérées dans le milieu. Aucune condition d'exclusion n'est imposée entre les barres, de sorte que toute la gamme de fraction solide peut être considérée. La figure 4.18 montre deux exemples de cartes ainsi générées, pour des fractions solide de 20% et 50%.

Les simulations réalisées dans ces milieux ont révélé la propagation de deux ondes longitudinales. Comme pour les milieux précédents, nous avons également effectué les simulations dans les milieux de squelette immobile et de squelette sec, ce qui permet d'appliquer les formules de vitesses de la théorie de Biot. En réalité, pour de tels milieux la tortuosité vaut tout simplement $\alpha = 1$, ce qui simplifie la détermination des paramètres. La vitesse de cisaillement a été prise identique à celle de la phase solide⁸. La figure 4.19 représente les vitesses observées en fonction

8. La propagation d'une onde de cisaillement dans le milieu étant très dispersive, il était difficile d'estimer une vitesse à partir de la pente du front d'onde.

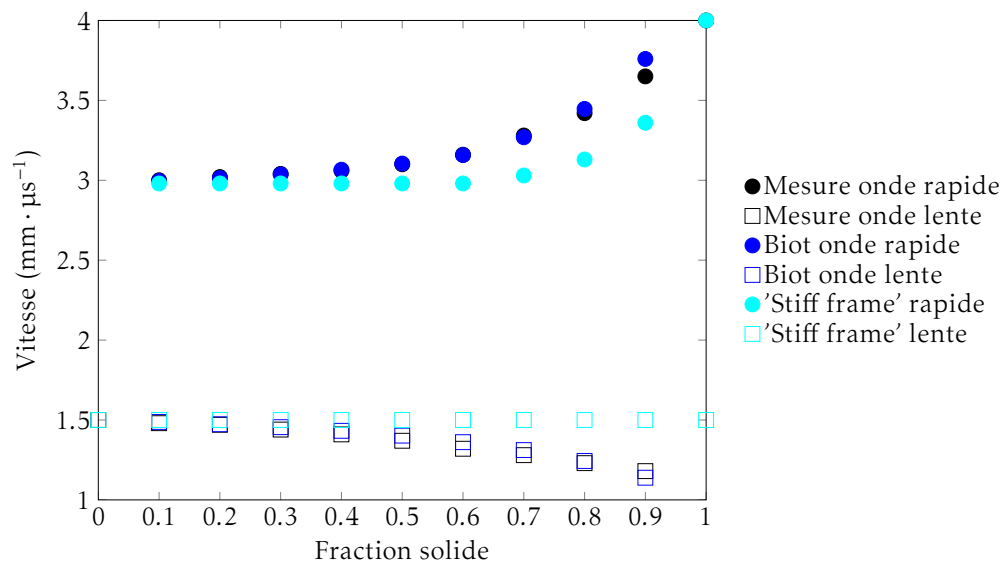


FIGURE 4.19. – Vitesse des ondes rapide et lente observées dans des modèles constitués de barres répartis aléatoirement dans l’eau en fonction de la fraction solide comparées aux prédictions de la théorie de Biot.

de la fraction solide et celles prédites par la théorie de Biot. De la même façon qu’avec les ellipsoïdes, les vitesses issues de la théorie de Biot sont en très bon accord avec les valeurs observées. Autrement dit, théorie de Biot et hypothèses des ondes guidées ne sont pas incompatibles, bien au contraire. Ce résultat, qui peut sembler assez déroutant de prime abord, n’est finalement pas si étonnant. En effet, d’une certaine façon les milieux constitués de barres de solide dans l’eau sont une variante du modèle de Schoenberg qui a déjà montré des résultats convaincants pour l’estimation des vitesses des deux ondes dans l’os trabéculaire [16].

4.3.4. Conclusions sur l’étude quantitative des milieux modèles

L’utilisation d’un modèle numérique simple nous a permis de pouvoir comparer les vitesses et coefficients d’atténuation observés à une théorie de diffusion multiple (Independent Scattering Approximation) et aux théories d’ondes en milieux poreux que sont la formule de Wood et la théorie de Biot, **sans ajustement de paramètres**. Deux régimes se distinguent, selon qu’une ou deux ondes sont observées. Pour ce qui est de l’ISA, il y a également une distinction selon la fraction solide du milieu. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant (● : théorie compatible avec l’observation, ✗ : inadéquation de la théorie) :

	Une onde (ϕ_s petit)	Une onde (ϕ_s grand)	Deux ondes
ISA	Vitesse ●	Vitesse ✗	Vitesses ✗
	Atténuation ●	Atténuation ✗	Atténuation ✗
Formule de Wood	Vitesse ●	Vitesse ●	Vitesses ✗
	Atténuation ✗	Atténuation ✗	Atténuation ✗
Théorie de Biot	Vitesse ●	Vitesse ●	Vitesses ●
	Atténuation ✗	Atténuation ✗	Atténuation ✗

Chaque théorie a donc ses avantages et ses inconvénients. L’ISA décrit bien à la fois la vitesse et l’atténuation, mais seulement dans le cas restreint de la propagation d’une seule onde et pour une faible fraction solide. C’est la seule théorie parmi les trois à prévoir une atténuation dans les milieux étudiés. L’atténuation est en effet le point faible de la formule de Wood et de la théorie

de Biot, qui ne prévoient aucune atténuation dans ce genre de milieux. En revanche, les vitesses sont plutôt bien prédites par les théories de milieux poreux, et surtout par la théorie de Biot qui est plus complète puisqu'elle prédit également la vitesses des deux ondes le cas échéant. Il y a cependant un inconvénient, du moins telle qu'elle a été appliquée, c'est que contrairement à l'ISA elle ne prévoit pas la dispersion qui est observée dans les milieux. La prédiction de la dispersion négative par l'ISA fait d'ailleurs écho à des résultats dans l'os trabéculaire quand une seule onde est observée [60], ce qui pourrait permettre de lever une controverse [64].

L'étude qualitative laissait penser que l'onde rapide pouvait être une onde guidée par les travées. Pour conforter cette idée, des milieux composés de barres réparties aléatoirement dans le fluide, sièges par définition d'ondes guidées, ont été étudiés. Ils ont également montré la présence de deux ondes longitudinales, dont les vitesses ont trouvé un très bon accord avec la théorie de Biot, tout comme pour les modèles numériques d'ellipsoïdes. Ce résultat conforte l'idée que le phénomène des deux ondes soit lié au guidage d'ondes. Il conduit également à repenser la limite de validité de la théorie de Biot.

4.4. Conclusion sur ces travaux numériques

Le modèle simple d'ellipsoïdes solides distribués aléatoirement dans le fluide n'est certes pas une représentation fidèle de l'os trabéculaire, mais reproduit bon nombre des caractéristiques ultrasonores de l'os. Il constitue donc une première étape très utile, notamment pour mieux comprendre les paramètres à l'origine de l'observation de deux ondes longitudinales. Les différents paramètres étudiés suggèrent ainsi que l'onde rapide pourrait être guidée par les travées osseuses, tandis que l'onde lente se propagerait majoritairement dans le fluide.

Vitesses et coefficients d'atténuation ont ensuite été comparés avec l'ISA, la formule de Wood et la théorie de Biot. Elles suggèrent que l'atténuation dans les modèles serait plutôt prédite par les théories de diffusion multiple alors que les vitesses seraient plutôt correctement décrites par les théories de milieux poreux. Par ailleurs, les vitesses observées dans des milieux constitués de guides d'ondes ont montré un très bon accord avec les prédictions de la théorie de Biot.

4.5. Perspectives

Ces travaux numériques ont permis de lever certaines interrogations sur la possibilité d'utiliser telle ou telle théorie dans le cadre de l'os trabéculaire. La théorie de Biot semble être adaptée pour prédire la vitesse des ondes se propageant dans l'os trabéculaire. C'est très intéressant, car comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, cette théorie propose de nouveaux paramètres potentiellement pertinents d'un point de vue clinique, tels que la tortuosité α et les modules K_{sec} et N . La prochaine étape serait d'effectuer des tests d'effort sur des structures dont ces paramètres seraient connus et contrôlés, afin d'évaluer leur influence sur la solidité de la structure. La tortuosité a d'ailleurs déjà été testée en ce sens [66]. Il reste que ces paramètres sont difficilement mesurables *in vivo* ou même *in vitro*. Une possibilité serait donc de les déterminer à partir des structures numérisées. D'ailleurs, pour pouvoir vraiment connaître et maîtriser ces paramètres, le raisonnement inverse pourrait être imaginé, à savoir générer les structures numériquement pour ensuite les recréer par impression 3D. Une partie du prochain et dernier chapitre de cette thèse (§5.2) est justement dédiée à l'étude de l'impression 3D de structures type d'os trabéculaire.

D'un point de vue théorique maintenant, l'ISA a montré l'intérêt des techniques de diffusion multiple pour tenter de prédire l'atténuation dans des structures similaires à l'os trabéculaire. Malheureusement, ses trop fortes hypothèses la rendent limitée pour une application à l'os trabéculaire. Des théories moins restrictives pourraient donc être envisagées [67], même si comme pour la théorie de Biot, leur utilisation s'accompagnera nécessairement d'une difficulté accrue

pour pouvoir l'appliquer *in vivo*. Toujours concernant l'atténuation, d'autres modèles numériques pourraient être envisagés pour mieux la comprendre, comme par exemple des structures type nids d'abeille où l'atténuation pourrait être reliée aux nombres de nœuds par unité de longueur. Un point qui pourrait également aider à expliquer l'atténuation observée serait de comprendre la différence d'atténuation observée entre les simulations 2D et 3D, principalement pour l'onde rapide. Cela pourrait par exemple être en lien avec la tortuosité, qui est plus grande dans les milieux 2D que 3D à fraction solide identique.

Enfin, dernier point, peut-être le plus ambitieux d'un point de vue théorique. Les milieux ont montré tour à tour qu'ils se comportaient en accord avec certaines prédictions des théories de milieux poreux, des théories de diffusion multiple, et qu'ils pouvaient également être cohérents avec l'hypothèse d'ondes guidées. Cela laisse penser qu'une théorie plus globale, dont chacune de ces théories serait un cas particulier, pourrait permettre de pleinement expliquer la propagation dans l'os trabéculaire.

RETOUR À L'OS TRABÉCULAIRE

Pour terminer ce manuscrit, après avoir présenté des modèles théoriques et numériques, nous allons nous intéresser de plus près à la structure osseuse réelle. Ce chapitre se décompose en deux parties. La première expose des résultats d'expériences menées sur un échantillon d'os trabéculaire de cheval. Il s'agit de mesures en transmission et en réflexion, semblables à celles effectuées sur les échantillons Sawbones (§2.2). Cela sera l'occasion de mieux cerner les enjeux expérimentaux de la propagation dans l'os trabéculaire.

La deuxième partie concerne la réalisation d'échantillons modèles d'os trabéculaire. En recherche, avoir des échantillons modèles (appelés "phantoms" en anglais) est un atout considérable. De tels échantillons sont d'ores et déjà utilisés pour l'échographie des tissus mous, contribuant au développement de nouvelles techniques d'imagerie. De même pour la caractérisation ultrasonore de l'os cortical, la société Sawbones commercialisant des échantillons aux propriétés élastiques proches de celles de l'os dense. Nous avons cependant vu dans le deuxième chapitre (§2.2) que les mousses solides vendues par cette société comme modèles d'os trabéculaire ne convenaient pas pour une application ultrasonore. La société CIRS commercialise bien un modèle d'os trabéculaire¹ à visée ultrasonore, mais ce milieu homogène ne reproduit que l'atténuation de l'os et en aucun cas sa complexité structurelle.

Avoir des échantillons parfaitement contrôlés et statistiquement homogènes, ce que n'est pas l'os trabéculaire, serait pourtant d'une aide précieuse. Par exemple, cela pourrait permettre de tester l'influence de paramètres choisis sur la propagation ultrasonore. Ainsi, en dehors des échantillons commerciaux évoqués précédemment, plusieurs approches ont été mises en œuvre pour réaliser des échantillons modèles [68–73]. À l'image de l'échantillon de la société CIRS, les modèles ainsi réalisés. Néanmoins, parmi elles, l'utilisation d'une technologie en plein essor, l'impression 3D, apparaît particulièrement prometteuse. Jusqu'à maintenant, les tentatives d'impression de structures type os trabéculaire se sont restreintes soit à une coupe 2D simplifiée et extrudée pour obtenir un objet tridimensionnel [69], soit à des modèles treize fois plus grands que l'os original [70]. L'amélioration constante de cette technologie peut néanmoins laisser espérer des impressions à taille réelle. C'est pourquoi la réalisation de structures osseuses par impression 3D est étudiée à la fin de ce chapitre.

5.1. Échantillon d'os de cheval

L'échantillon d'os trabéculaire étudié provient de l'épiphyse (extrémité) d'un fémur de cheval. Outre le fait qu'un os de cheval est facilement disponible dans une boucherie, l'os trabéculaire de cheval a l'avantage d'être plus anisotrope que l'os trabéculaire humain. Malheureusement, la

1. <http://www.cirsinc.com/products/all/84/quantitative-ultrasound-phantom/>

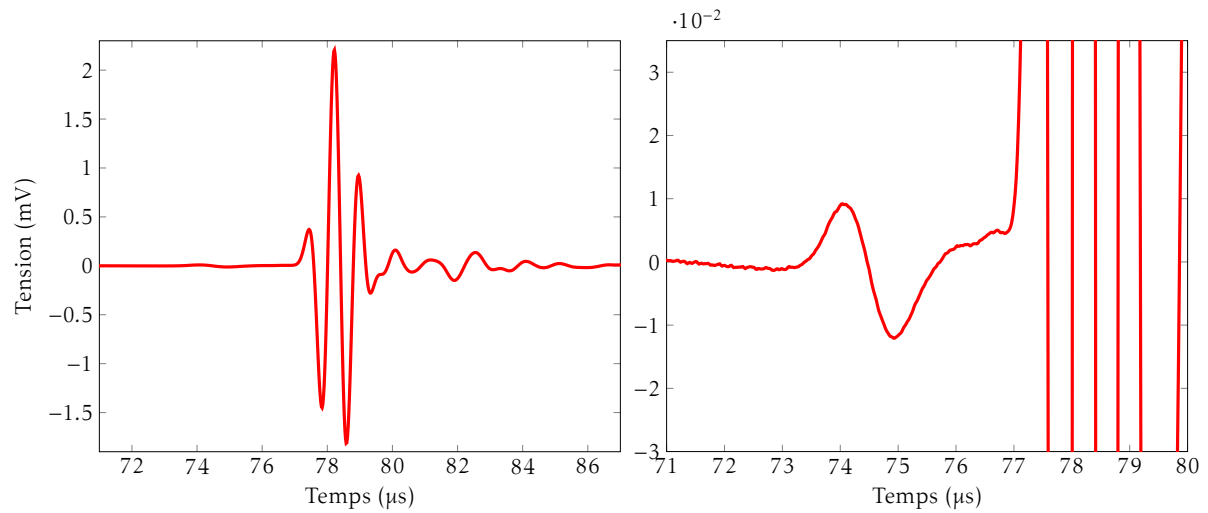
direction d'anisotropie n'a pas été correctement identifiée lors de la découpe de l'échantillon, si bien que la propagation ne sera ni vraiment parallèle ni perpendiculaire à la direction des travées. Les dimensions de l'échantillon sont $50 \times 35 \times 11 \text{ mm}^3$. Pour pouvoir effectuer des moyennes spatiales, les dimensions transverses doivent être les plus grandes possibles. Aussi la propagation se fera donc uniquement selon l'épaisseur de 11 mm. Les protocoles expérimentaux pour les mesures en transmission et en réflexion sont les mêmes que ceux utilisés pour la caractérisation des échantillons Sawbones. Pour rappel, ils sont schématisés sur les figures 2.2 et 2.7. Les résultats expérimentaux présentés sur cet échantillon ont été obtenus dans le cadre du stage de recherche de Marc Gesnik, que j'ai co-encadré.

5.1.1. Expérience en transmission

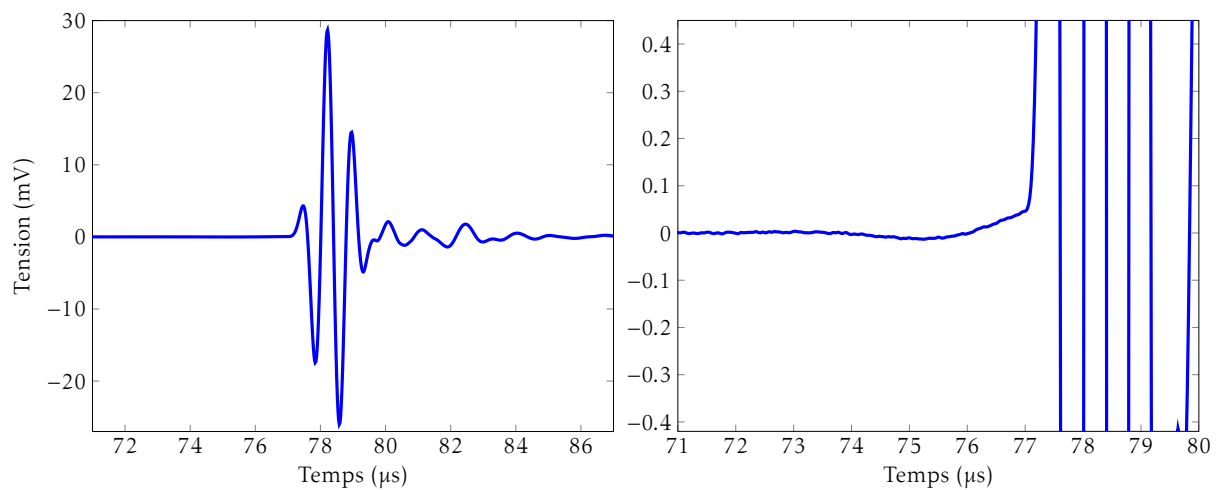
Les expériences sont réalisées avec les mêmes paires de transducteurs que pour les échantillons Sawbones, de fréquences centrales 1,25 MHz, 2,25 MHz et 3,25 MHz. La distance entre les deux transducteurs est de 114 mm. Le résultat de l'expérience à 1,25 MHz est représenté sur la figure 5.1. Une lecture rapide du signal transmis après propagation dans l'os trabéculaire laisserait penser qu'une seule onde s'est propagée (a). En réalité, en zoomant sur le début du signal enregistré (b), il apparaît un signal de très faible amplitude, plus de 200 fois plus faible que le signal de plus grande amplitude. Pour s'assurer qu'un si faible signal n'est ni du bruit ni un artefact, la même expérience est réalisée sans l'échantillon (porte échantillon laissé en place). Dans ce cas la propagation se fait exclusivement dans l'eau, ce qui donne le signal de la figure 5.1(c). L'amplitude de ce signal est plus de 10 fois supérieure à celle du signal de plus grande amplitude en présence de l'échantillon. De la même façon un zoom est réalisé sur la partie du signal avant du signal (d), mais l'onde observée en présence de l'échantillon n'apparaît plus. Cela laisse penser que le signal observé en présence de l'échantillon est l'onde rapide, tandis que le signal de plus grande amplitude est l'onde lente. En supposant que tel est le cas, et sachant que la vitesse mesurée dans l'eau est $1,47 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, cela donnerait d'après la formule 2.2.3 les valeurs suivantes : $v_{\text{lente}} = 1,47 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ et $v_{\text{rapide}} = 2,9 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. Ces valeurs sont relativement en accord avec les simulations du chapitre précédent, même si on s'attendrait à une vitesse de l'onde lente plus basse que la vitesse du son dans l'eau. Une raison possible est que la fraction solide de l'os trabéculaire est bien que faible ($\phi_s \approx 0.2$) que celle des modèles numériques précédents ($\phi_s = 0.5$ pour la référence).

La grande différence d'amplitude entre onde lente et onde rapide était attendue. En effet, c'est un phénomène qui a déjà été discuté dans le chapitre précédent (§4.2.7), et déjà observé lors d'expériences sur des échantillons d'os trabéculaire [16]. Comme l'onde rapide se propage majoritairement dans la phase solide et l'onde lente majoritairement dans la phase fluide, la faible fraction solide de l'os trabéculaire renforce l'onde lente par rapport à l'onde rapide. D'autre part, le milieu environnant étant de l'eau, l'adaptation d'impédance est meilleure pour l'onde lente que pour l'onde rapide. Ces deux effets contribuent à l'observation d'une onde rapide d'amplitude beaucoup plus faible que celle de l'onde lente.

Le même type de résultat a été observé à 2,25 MHz. En revanche, à 3,25 MHz l'atténuation des signaux était telle que le rapport signal sur bruit n'était pas suffisamment élevé pour pouvoir observer une onde de si faible amplitude. Les résultats de cette étude en transmission montrent que l'observation expérimentale des deux ondes peut être très délicate, en tout cas pour une direction de propagation quelconque par rapport à l'anisotropie de l'os. Cela pourrait être un handicap certain en vue d'une exploitation clinique de la propagation de ces deux ondes, même si les conditions *in vivo* ne sont pas les mêmes qu'ici (onde rapide vraisemblablement amplifiée par la présence de l'os cortical notamment).



(a) Signal obtenu après propagation à travers l'os trabéculaire (b) Zoom sur l'onde rapide du signal obtenu après propagation à travers dans l'os trabéculaire



(c) Signal obtenu après propagation uniquement dans l'eau (d) Zoom du signal obtenu après propagation uniquement dans l'eau

FIGURE 5.1. – Signal transmis à travers l'échantillon d'os trabéculaire de cheval ((a) et (b)) pour une impulsion de fréquence centrale 1,25 MHz. Ce signal est comparé avec une référence correspondant à une propagation uniquement dans l'eau ((c) et (d)). Les figures (b) et (d) sont des zooms des figures (a) et (c).

5.1.2. Expérience en rétrodiffusion

Comme pour les expériences de rétrodiffusion menées sur les échantillons Sawbones 2.2.3, il s'agit d'étudier le pic de rétrodiffusion cohérente. Trois barrettes de fréquences centrales 1,5 MHz, 2,5 MHz et 4 MHz ont été utilisées. L'intensité moyenne rétrodiffusée dans les trois cas est représentée sur la figure 5.2. Pour les trois fréquences on observe un cône de rétrodiffusion cohérente. Cela signifie donc que l'échantillon d'os trabéculaire étudié ici (d'épaisseur 11 mm) est **multiplement diffusant** sur la plage de fréquences 1,5 MHz-4 MHz. On constate également que le cône de rétrodiffusion s'affine plus rapidement à 4 MHz qu'à 2,5 MHz et à plus forte raison à 1,5 MHz. Cela signifie que le libre parcours moyen diminue avec la fréquence, phénomène classique dans les milieux diffusants. Il y a cependant un problème lorsque l'on parle de libre parcours moyen dans ce cas. En effet, l'étude en transmission a montré vraisemblablement la présence de deux ondes longitudinales. Chacune des deux ondes subit une atténuation qui lui est propre. Autrement dit, il n'y a pas un libre parcours moyen, mais deux. En conséquence, donner une valeur de libre parcours moyen à partir du temps de décroissance du cône n'a pas vraiment de sens ici.

5.1.3. Simulations

3D : observation de l'onde cohérente

Le chapitre précédent a montré qu'il était plus facile d'observer deux ondes longitudinales en simulation, grâce à la possibilité d'obtenir un diagramme distance-temps de la propagation à l'intérieur du milieu. Nous allons donc étudier la propagation dans une version numérisée d'os trabéculaire. Cette reconstitution numérique a été obtenue à l'aide d'une micro-tomographie d'un échantillon d'os trabéculaire de cheval (tiré du même fémur que l'échantillon utilisé dans les expériences précédentes) effectuée au Synchrotron de Grenoble. Cela a permis d'avoir une très bonne résolution de $12,64\mu\text{m}$. La contrepartie est que la taille de l'échantillon est limitée. Elle est ici $34 \times 11 \times 18\text{mm}^3$.

Pour la simulation, un sous-volume est extrait de cette structure, de dimension $10 \times 6 \times 6\text{mm}^3$. Ce sous-volume a été choisi pour que la propagation soit le plus possible dans la direction des travées. Les caractéristiques de la simulation sont les mêmes que dans le chapitre précédent, décrites à l'annexe A.2. Seul le pas spatial est adapté pour correspondre à la résolution des données, soit $\Delta x = 12,64\mu\text{m}$. Le résultat est représenté sur la figure 5.3. Comme le montre cette figure, deux ondes sont bien observées dans l'échantillon d'os de cheval. La mesure des pentes des deux fronts d'onde donne la vitesse de chacune de ces ondes, en supposant que la dispersion n'est pas trop forte (ce qui est visiblement le cas). On trouve ainsi : $v_{\text{lente}} = 1,47\text{mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ et une vitesse de l'onde rapide $v_{\text{rapide}} = 2,7\text{mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. Même si l'échantillon de la simulation n'est pas exactement le même que celui utilisé pour l'expérience, de même pour les propriétés des deux phases², il est intéressant de mettre ces valeurs en regard de celles obtenues expérimentalement. Elles sont tout à fait compatibles. De plus, la simulation montre également que l'onde rapide est très atténuée par rapport à l'onde lente. Ces résultats tendent donc à confirmer que les signaux observés expérimentalement étaient bien l'onde lente et l'onde rapide.

D'autre part, il peut être intéressant de regarder si les conclusions du chapitre précédent concernant les vitesses prédites par la théorie de Biot sont encore valables dans le cas d'une structure osseuse réelle. Ainsi, les propagations dans le squelette sec, le squelette rigide et celle d'une onde de cisaillement dans le milieu poreux sont également simulées, afin de déterminer la tortuosité α et les modules K_{sec} et N . Les autres paramètres intervenant dans la théorie de Biot sont connus (masses volumiques et module de compression de chaque phase) ou facilement mesurables dans

2. La vitesse du son dans l'eau est $c_0 = 1,5\text{mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ dans la simulation par exemple, donc un peu plus élevée que la vitesse expérimentale.

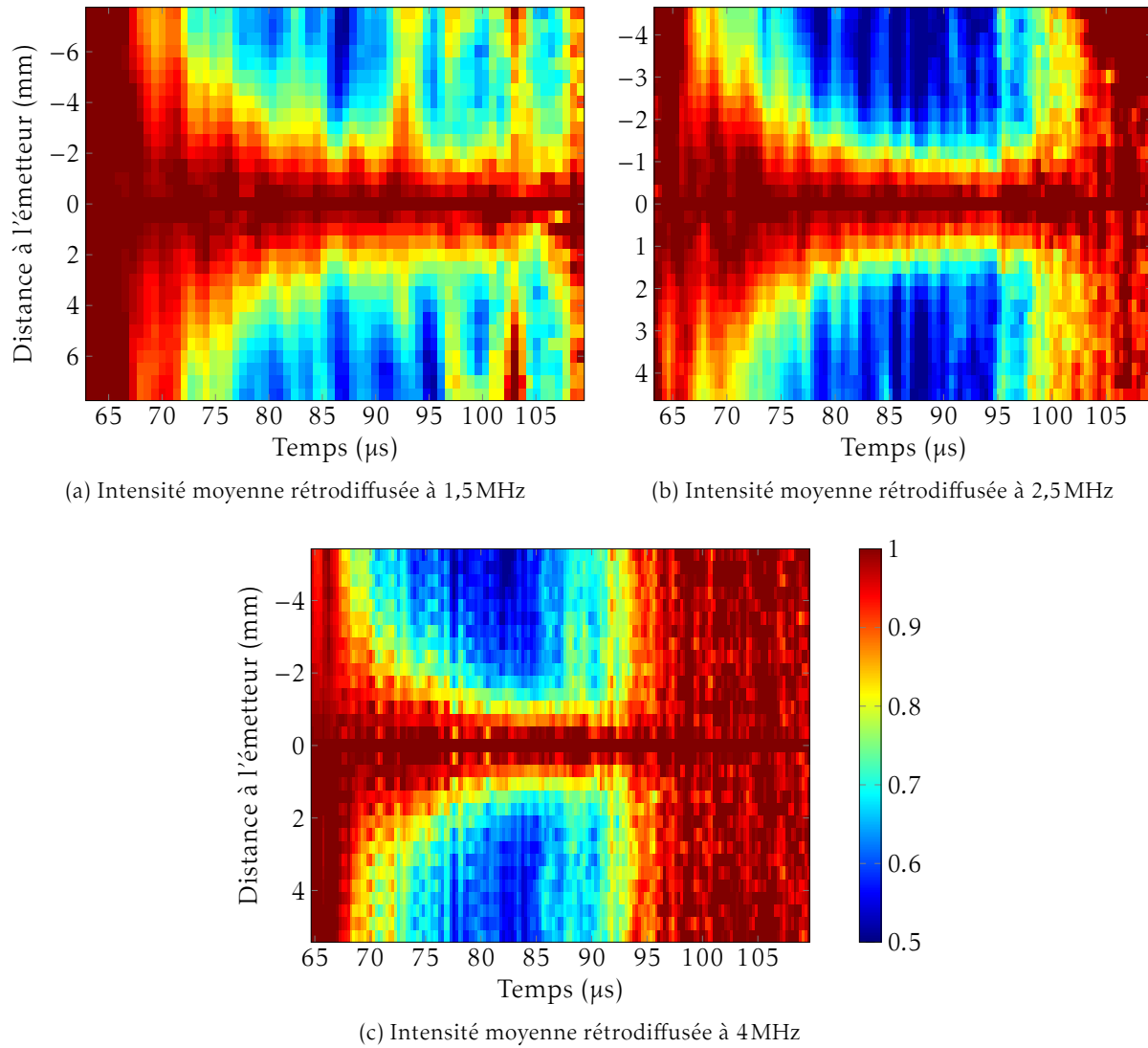


FIGURE 5.2. – Intensité moyenne rétrodiffusée par l'échantillon d'os trabéculaire de cheval. Les colonnes de chaque image sont renormalisées par la valeur centrale (lorsque le récepteur est l'élément qui a émis). (a) Fréquence centrale : 1,5 MHz. (b) Fréquence centrale : 2,5 MHz. (c) Fréquence centrale : 4 MHz.

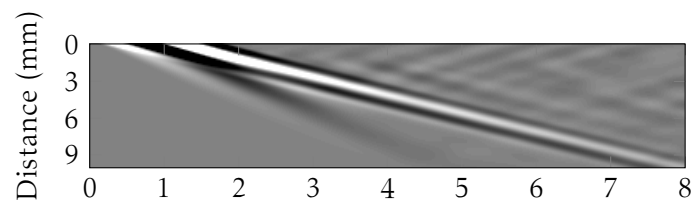


FIGURE 5.3. – Simulation de la propagation d'une impulsion sinusoïdale de fréquence centrale 1 MHz dans un échantillon d'os trabéculaire de cheval numérisé.

le cas d'un échantillon numérique (fraction solide ϕ_s). Les valeurs de ces huit paramètres sont répertoriées dans le tableau suivant :

K_s	ρ_s	K_f	ρ_f	ϕ_s	K_{sec}	N	α
29,6 GPa	$1850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2,25 GPa	$1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	0,193	1,5 GPa	0,7 GPa	1,15

Ces paramètres déterminés, nous pouvons appliquer la théorie de Biot, pour comparaison avec les vitesses mesurées dans l'échantillon d'os numérique (figure 5.3(a)) :

	Vitesse mesurée	Théorie de Biot	Hypothèse stiff frame
Onde rapide	$2,7 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$2,4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$2,3 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$
Onde lente	$1,47 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$1,3 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$1,4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$

L'ordre de grandeur des vitesses des ondes rapide et lente est à peu près bien prédit par la théorie de Biot, même s'il y a des différences notables. Cela peut s'expliquer par la difficulté de la mesure de vitesse de propagation dans les différents milieux limites (qui ont permis l'estimation des paramètres d'entrée). La fraction solide étant faible, les signaux dans le squelette sec ou lors de la propagation de l'onde de cisaillement sont très atténués. Par ailleurs, pour cet exemple, l'hypothèse stiff frame prédit des vitesses similaires à celles de la théorie de Biot générale. Il serait nécessaire de reproduire ces mesures sur un plus grand nombre d'échantillons d'os trabéculaire pour conclure quant à la validité des vitesses prédites par la théorie de Biot pour une vraie structure osseuse.

2D : visualisation des ondes guidées

Pour mieux comprendre la propagation dans l'os trabéculaire, il peut être instructif d'observer la propagation à l'intérieur du milieu. Pour cela, il est plus facile de sélectionner seulement un plan et de faire une simulation 2D. La figure 5.4 montre la propagation à l'intérieur de la structure d'os trabéculaire (représentée en haut de la figure), à quatre instants différents. Ce qui est observé ici n'est plus l'onde cohérente, mais seulement une réalisation. Malgré tout, il apparaît clairement une propagation plus rapide dans les travées osseuses, qui se dessinent au fur et à mesure de la propagation, tandis qu'un front d'amplitude plus élevée se propage plus lentement, essentiellement dans la phase fluide. C'est un argument supplémentaire en faveur de l'hypothèse d'un guidage de l'onde rapide par les travées osseuses.

5.2. Réalisation d'échantillons modèles par impression 3D

En quelques années, l'impression 3D a fait des progrès spectaculaires. Des projets les plus révolutionnaires les uns que les autres voient régulièrement le jour. Citons par exemple l'imprimante de pizzas imaginée par la NASA³ ou, également dans le domaine de l'aérospatiale, l'étude de faisabilité de l'impression d'une base lunaire⁴. Cette technologie a aussi fait ses preuves dans le domaine de la construction avec l'impression en Chine de 10 maisons en moins d'une journée⁵. Dès lors, il n'est pas inimaginable de pouvoir créer des structures osseuses par impression 3D. Comme un clin d'œil, ultrasons, os et impression 3D sont d'ailleurs déjà réunis autour du projet

3. <http://www.futura-sciences.com/magazines/high-tech/infos/actu/d/technologie-science-decalee-pizzas-cuisees-impression-3d-nasa-46663/>

4. http://www.esa.int/fre/ESA_in_your_country/France/Construire_une_base_lunaire_en_impression_3D

5. http://www.maxisciences.com/imprimante-3d/imprimante-3d-10-maisons-construites-en-moins-de-24-heures_art32422.html

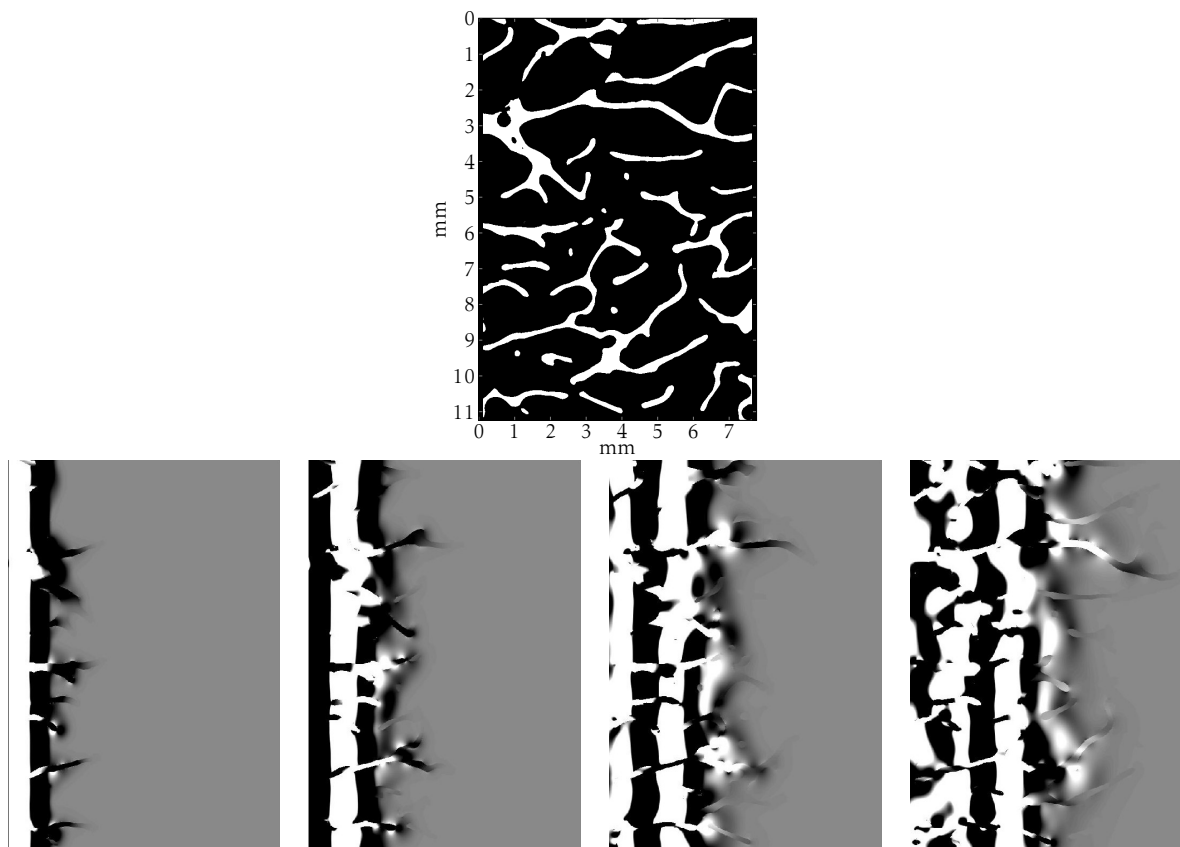


FIGURE 5.4. – Simulation à deux dimensions de la propagation dans un échantillon d'os trabéculaire de cheval. En haut, la carte utilisée pour la simulation, issue des données de tomographie de l'os trabéculaire. En bas, composante de la contrainte dans le direction de propagation, à l'intérieur de l'échantillon d'os trabéculaire, à quatre instants différents.

Osteoid, plâtre créé sur mesure par impression 3D devant permettre de consolider les fractures plus rapidement grâce aux ultrasons⁶.

Pour autant, imprimer une structure complexe comme celle de l'os trabéculaire n'est pas si aisé. Comme évoqué en introduction de ce chapitre, l'idée d'imprimer une telle structure pour étudier la propagation ultrasonore date de la fin des années 90 [69, 74]. Néanmoins, à partir de la structure numérisée de l'os trabéculaire, seule une coupe 2D extrudée et aux travées épaissies a pu être imprimée. L'échantillon obtenu s'éloignait donc sensiblement de l'échantillon d'origine. En fait, la structure de l'os trabéculaire s'éloigne des standards d'imprimantes 3D disponibles au plus grand nombre. Il y a en effet, d'une part, l'échelle des travées, de l'ordre de la centaine de microns, et, d'autre part, l'échelle macroscopique de l'échantillon d'os, de l'ordre de quelques centimètres. Ce mélange d'échelles nécessite une résolution à la fois suffisante pour décrire correctement la micro-structure et en même temps pas trop fine pour pouvoir imprimer des échantillons suffisamment grands. Un moyen de contourner la contrainte de résolution est de changer d'échelle, comme par exemple Attenborough *et al.* [70] qui ont imprimé un os trabéculaire treize fois plus grand que l'original. Cela permet d'étudier certains aspects de la propagation ultrasonore dans ces structures, quitte à adapter la fréquence ultrasonore, mais sera insuffisant au moment de réellement développer un dispositif médical de caractérisation *in vivo* de l'os trabéculaire.

Les enjeux liés à la réalisation de structures osseuses synthétiques étant établis, voyons maintenant les différentes technologies d'impression 3D existantes, afin de déterminer la plus appropriée dans notre cas.

5.2.1. Technologies et défis liés à la structure de l'os trabéculaire

Il existe de nombreuses technologies différentes d'impression 3D. Ce terme désigne en fait tout procédé qui permet de fabriquer une structure tridimensionnelle par une méthode additive, c'est-à-dire par ajouts successifs de matière. En ce sens l'impression 3D s'oppose aux procédés jusqu'à maintenant plus classiques d'usinage (tour, fraise, laser), qui au contraire éliminent la matière dans un bloc de matériau. Les deux techniques ont leurs avantages et inconvénients, mais en l'occurrence pour obtenir une structure complexe comme celle de l'os poreux, seule l'impression 3D est envisageable.

Il existe principalement trois formes d'impression 3D : le dépôt de matière en fusion, la stéréolithographie et le frittage. Elles reposent sur des procédés physiques différents, mais le principe en amont est le même. L'impression d'un objet suppose d'abord d'avoir une structure tridimensionnelle numérique. Classiquement, elle est obtenue à l'aide de logiciels de CAO⁷. Cependant, la structure peut tout aussi bien être une pile d'images ou une matrice à 3 dimensions, plus adaptées à des structures complexes et aléatoires, à l'image de celles générées dans le chapitre 4.

Quel que soit le format de départ, les imprimantes 3D n'acceptent en général qu'un seul format de fichiers (ou ses dérivées), le format STL. Spécialement conçu pour l'impression 3D, il s'agit d'un format qui ne prend en compte que les surfaces de l'objet tridimensionnel. Les logiciels de CAO permettent, en général, d'exporter relativement facilement les structures au format STL. En revanche, lorsque les données sont des matrices ou des piles d'images, ce qui est le cas de nos données Synchrotron ou de nos milieux simulés, l'exportation est beaucoup plus complexe : les imprimantes 3D du commerce n'ont pas été pensées pour ce type d'application. C'est donc un premier obstacle pour l'impression de structures type os trabéculaire.

Le passage obligé par le format STL est d'autant plus frustrant que le mode d'impression convient parfaitement à des données sous forme de piles d'images. Pour toutes les techniques les structures sont en effet générées couche par couche. La direction d'empilement des couches,

6. <http://www.sciencesetavenir.fr/sante/20140430.OBS5720/impression-3d-un-platre-equipe-d-un-dispositif-a-ultrasons.html>

7. Conception Assistée par Ordinateur.

que nous appellerons z , n'est donc pas complètement équivalente aux directions dans le plan x et y . En particulier la résolution selon z n'est pas nécessairement la même que celle dans les autres directions.

Dépôt de matière en fusion

Avec cette méthode, un filament de matière est localement fondu aux endroits où le matériau doit être déposé. En général, le matériau utilisé est de l'ABS (acrylonitrile butadiène styrène, même plastique que le LEGO®), mais sur certaines machines un deuxième matériau, sacrificiel, peut également être utilisé en complément. Ce matériau sert uniquement de support temporaire lors de l'impression⁸, ce qui peut être particulièrement intéressant pour la réalisation de structures poreuses. Malheureusement, le défaut de cette technique est sa résolution, qui est en général au mieux de 100 μm , donc trop grossière pour correctement décrire les structures qui nous intéressent.

Stéréolithographie

Cette fois-ci le consommable est une résine (polymère) liquide photosensible qui durcit sous l'effet de rayonnements ultraviolets⁹. À chaque couche les parties devant être solidifiées sont éclairées. Selon les machines, l'éclairement se fait soit en une seule fois à l'aide d'une lampe et d'un masque adapté, soit en balayant le plan avec un laser, ce qui permet une meilleure résolution.

Une fois l'impression de la structure terminée, la pièce doit être nettoyée à l'aide d'un solvant pour éliminer toute trace de résine liquide, et mise dans un four à UV pour assurer une parfaite solidification. L'inconvénient de la stéréolithographie est justement le nettoyage de la pièce. C'est particulièrement vrai pour une structure comme l'os poreux, pour laquelle les pores de petite taille risquent de retenir la résine non polymérisée, très visqueuse. D'ailleurs, avec cette technique le milieu doit nécessairement avoir une porosité ouverte, c'est-à-dire que tous les pores doivent communiquer. Dans le cas contraire le liquide présent dans un pore fermé ne pourrait être évacué.

C'est cette technique qui a été utilisée par Langton *et al.* [74] et Attenborough *et al.* [70].

Frittage

Le frittage est reposé sensiblement sur le même principe que la stéréolithographie, à la différence notable que le consommable n'est pas un liquide mais une poudre. De la même façon que pour la résine photosensible, un laser va venir fusionner la poudre aux endroits devant être solidifiés pour créer la structure. L'avantage de cette technique est qu'elle permet d'utiliser d'autres types de matériaux que la stéréolithographie, comme des poudres métalliques. En revanche, le problème du nettoyage d'une pièce poreuse est encore plus délicat qu'avec la résine liquide, la poudre étant plus difficile à évacuer.

5.2.2. Premières tentatives

Rien que sur une échelle de trois ans de thèse, le paysage de l'impression 3D s'est largement étoffé. Un nombre pléthorique de sociétés proposent des ventes d'imprimantes ou des services d'impression. Néanmoins, encore une fois, imprimer une structure poreuse type os trabéculaire n'est pas quelque chose de classique. Aussi nos premières tentatives d'impression d'os ou des modèles numériques du chapitre 4 ne furent pas très convaincantes (figure 5.5).

Avant même l'impression, la création des fichiers STL fut, comme attendu, très compliquée. Au-delà des conversions des fichiers, ce sont les ressources informatiques qui étaient mises à rude

8. Il est ensuite éliminé à l'aide d'un solvant adapté.

9. Éventuellement selon la résine étudiée la longueur d'onde peut même être dans le domaine visible.



FIGURE 5.5. – Deux tentatives d'impression. À gauche, une réplique d'os trabéculaire. L'impression n'est pas à l'échelle (la structure imprimée est environ 20 fois plus grande que l'os original) du fait de la mauvaise résolution de l'imprimante utilisée ($100\mu\text{m}$). Taille de la structure imprimée : $6.4 \times 12.6 \times 4,2\text{cm}^3$. À droite, modèle référence du chapitre précédent, avant (haut) et après (bas) immersion dans l'eau.

épreuve. En effet, le nombre de surfaces dans une structure aussi complexe que l'os trabéculaire est très grand, ce qui rend le fichier STL très volumineux. Pour l'impression à proprement parler, voici les problèmes majeurs rencontrés :

- Certaines imprimantes de stéréolithographie rajoutent automatiquement des supports (visibles sur la photo de gauche de la figure 5.5) pour maintenir la structure pendant sa fabrication, ce qui la modifie irréversiblement en rajoutant d'une certaine façon une anisotropie artificielle.
- D'autres imprimantes, pour pallier ce problème, utilisent deux matériaux, dont un sacrificiel retiré par la suite à l'aide d'un solvant. Un test d'impression du modèle numérique de référence du chapitre précédent a été effectué avec cette méthode. Le résultat est visible sur la photo en haut à droite de la figure 5.5. Néanmoins, le matériau utilisé, proche de la cire, ne résiste pas à l'eau. Ainsi, après immersion la structure imprimée s'est détériorée, comme le montre la photo en bas à droite de la figure 5.5.

5.2.3. Collaboration avec l'Institut Curie

La solution à la plupart des problèmes précédents est venue d'une collaboration avec l'équipe de Laurent Malaquin à l'Institut Curie. Plus précisément, les résultats présentés ici ont été obtenus dans le cadre du stage ingénieur de Jason Woittequand, conjointement encadré par nos deux équipes. L'imprimante utilisée pour toutes les structures qui vont suivre est la "DigitalWax 028J Plus", commercialisée par la société italienne DWS Systems¹⁰ (figure 5.6). La résolution maximale annoncée est de $10\mu\text{m}$, ce qui laisse espérer une description correcte des travées osseuses (d'épaisseur de l'ordre de $100\mu\text{m}$).

10. <http://dwssystems.com/>

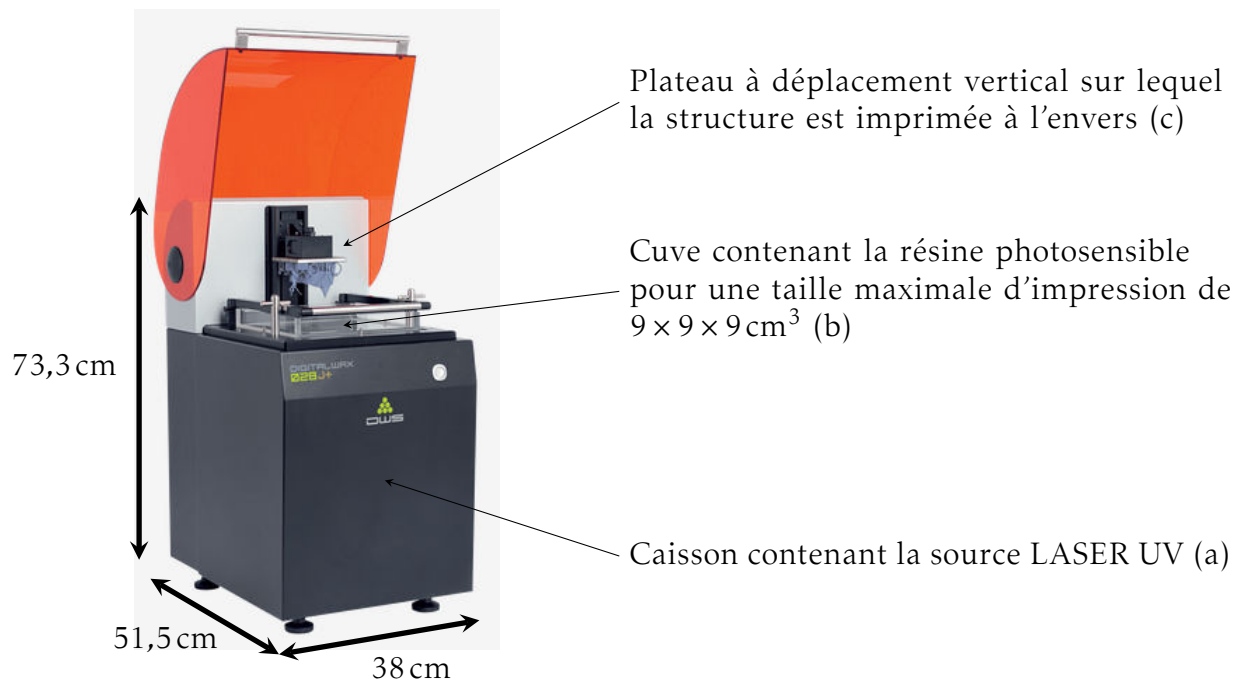


FIGURE 5.6. – Photographie commerciale de l'imprimante de stéréolithographie "DigitalWax 028J Plus". (Source : <http://dwssystems.com/>).

Fonctionnement

Puisqu'il s'agit d'une imprimante de stéréolithographie, le consommable est un photopolymère (résine polymère photosensible) liquide, situé dans le réservoir indiqué sur la figure (5.6(b)). Tel qu'est conçue l'imprimante, la structure va être imprimée à l'envers. À l'impression de chaque couche le plateau (5.6(c)) descend pour immerger la structure en cours dans le bain de résine. Le laser va alors balayer le plan horizontal pour créer la couche supplémentaire. Ensuite, le plateau remonte puis redescend pour créer la couche suivante, et ainsi de suite jusqu'à réalisation complète de la pièce.

Les matériaux

La société DWS Systems offre *a priori* un large choix de consommables. Dans les faits, ils sont tous composés de la même matrice polymère (de composition exacte tenue secrète par le fabricant) et ne diffèrent que par les particules ajoutées pour charger ce polymère. C'est assez logique puisque les propriétés de photo-réticulation de la matrice doivent être compatibles avec le laser utilisé dans l'imprimante.

D'autre part, cette imprimante est conçue pour du prototypage rapide en joaillerie. De ce fait, les propriétés mécaniques recherchées ne sont pas les mêmes que pour l'impression de structures osseuses. Ainsi, en examinant les informations données par le constructeur, on constate que les valeurs de modules de flexion (seules valeurs de module élastique fournies) sont relativement faibles (de 2 à 8 GPa environ) comparées au module de compression de l'os, aux alentours de 30 GPa. Un test des propriétés acoustiques de différents consommables est donc nécessaire.

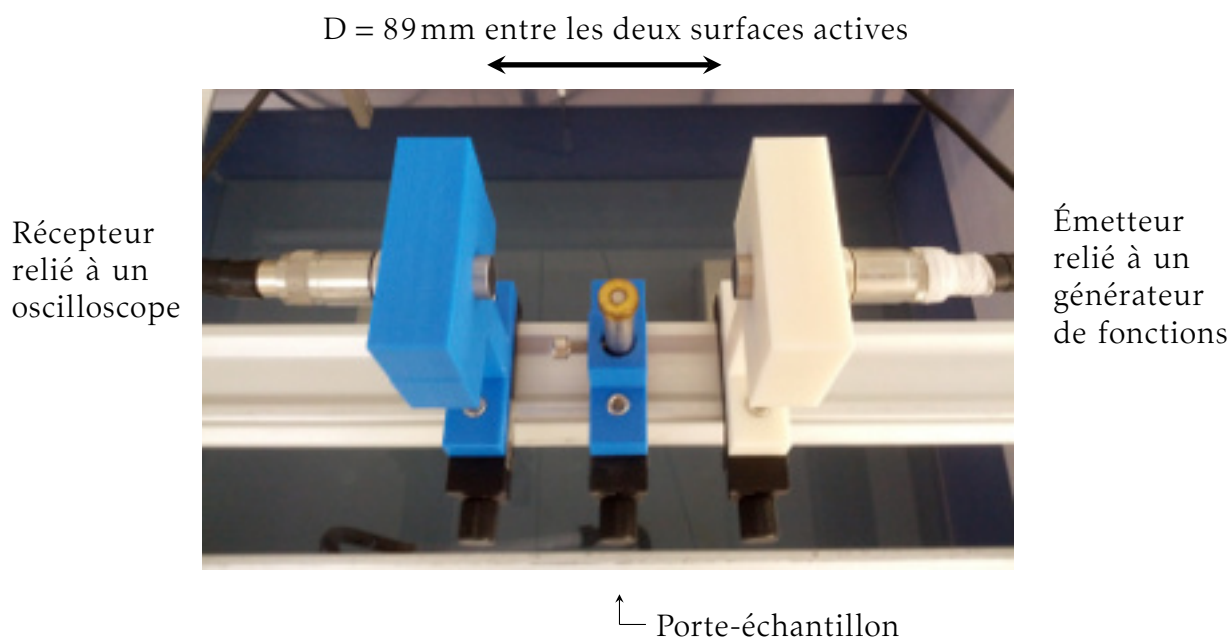


FIGURE 5.7. – Photographie du dispositif expérimental (hors de l'eau).

5.2.4. Dispositif expérimental ultrasonore

Le dispositif expérimental, utilisé aussi bien pour la caractérisation des matériaux que pour l'étude de la propagation ultrasonore dans les structures imprimées, est illustré sur la figure 5.7. Deux transducteurs circulaires à immersion¹¹ de fréquence centrale 1 MHz et de diamètre 12,7 mm sont placés en regard l'un de l'autre, sur deux supports identiques. Ces supports, tout comme le pied du porte-échantillon de hauteur réglable, ont été imprimés à l'aide de l'imprimante à dépôt de matière en fusion "uPrint SE Plus". L'ensemble est immergé dans une cuve d'eau, pour des mesures uniquement en transmission. Le transducteur émetteur (support blanc) est relié à un générateur de fonctions¹² tandis que le transducteur récepteur (support bleu) est relié à un oscilloscope¹³ interfacé avec un ordinateur. La distance entre les deux transducteurs est fixée pour toutes les expériences à $D = 85$ mm. Le signal émis est une impulsion d'une période de sinusoïde de fréquence 1 MHz et de période de répétition 1 ms.

5.2.5. Étude des propriétés des différents matériaux

Afin de tester les propriétés acoustiques des différentes résines, nous avons imprimé des blocs pleins de taille $20 \times 25 \times 30$ cm³. Selon l'orientation des blocs vis-à-vis des transducteurs, l'épaisseur de matériau traversée sera donc différente, ce qui sera utile pour déterminer les vitesses ultrasonores et estimer l'atténuation. La figure 5.8 montre les différents blocs de matériaux à caractériser. Le bloc (e) a été obtenu à partir du même matériau que le bloc (d), mais a ensuite été recuit à 120 °C pendant deux heures. Ce traitement particulier, proposé par la société DWS, est spécifique à ce matériau. Le sixième bloc (f), plus petit, correspond à une tentative de chargement à 50% de la résine pure (ds-2000) avec de l'hydroxyapatite. Cela pourrait être intéressant car il s'agit du minéral présent dans l'os. Néanmoins, l'impression avec cette résine maison très

11. Panametrics-NDT Olympus V303-SU

12. Tektronix AFG 3101

13. Tektronix TDS 3054B

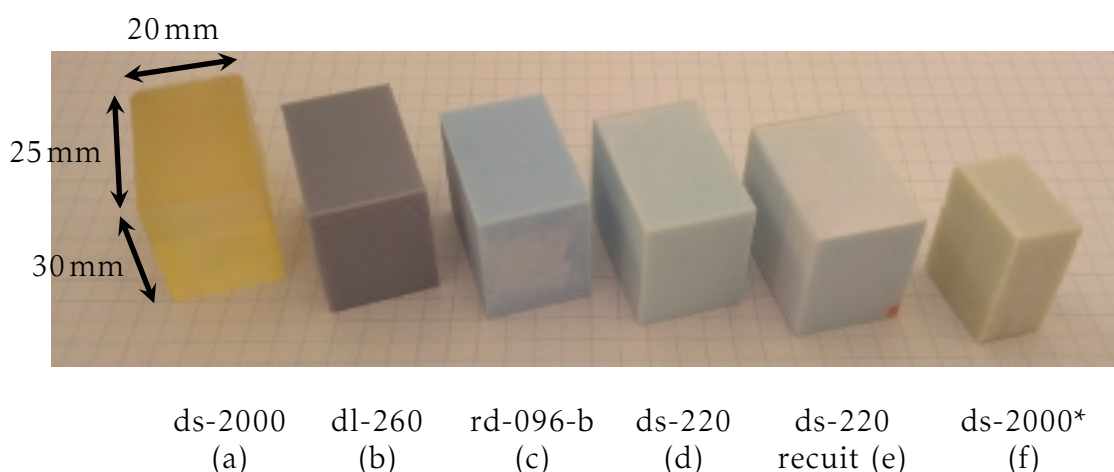


FIGURE 5.8. – Blocs de matériau pleins pour caractérisation ultrasonore. (a) à (d) : Quatre matériaux du catalogue du revendeur avec leur code nomenclature associé. (e) : Un bloc du matériau ds-220 recuit à 120°C pendant deux heures. (f) : Matériau ds-2000 (initialement non chargé) chargé à 50% d'hydroxyapatite, noté ds-2000* (bloc de plus petite taille à cause des mauvaises propriétés d'impression de ce matériau).

visqueuse s'est révélée particulièrement difficile. C'est la raison pour laquelle le bloc n'a pas pu être imprimé de la même taille que les autres.

Quatre paramètres ont été mesurés pour chacun des matériaux : la densité, la vitesse des ondes longitudinales c_L , celle des ondes transverses c_T et longueur caractéristique d'atténuation l_{att} de l'onde longitudinale.

- Le premier a simplement été obtenue en pesant les blocs.
- La vitesse des ondes longitudinales a été mesurée à l'aide du dispositif expérimental décrit au paragraphe précédent. Comme pour les mousses Sawbones (§2.2.2), l'estimation de la vitesse longitudinale est obtenue en comparant le temps d'arrivée avec et sans échantillon (propagation uniquement dans l'eau), selon la formule 2.2.3. Ici trois épaisseurs de milieux différentes ont pu être étudiées, ce qui permet d'obtenir une meilleure précision sur l'estimation de la vitesse.
- L'atténuation a été estimée par comparaison de l'intensité des signaux obtenus pour chacune de ces épaisseurs¹⁴.
- Enfin, la vitesse des ondes transverses a été mesurée à l'aide de deux transducteurs de cisaillement¹⁵ de fréquence centrale 1 MHz placés de chaque côté du bloc, au contact. Encore une fois, les trois épaisseurs de chaque matériau ont été étudiées. La figure 5.9 compare des signaux obtenus avec les transducteurs longitudinaux (expériences dans l'eau) et ceux obtenus avec les transducteurs transverses (au contact). On constate que dans le deuxième cas il est beaucoup plus difficile de déterminer le début de l'onde de cisaillement à cause de l'onde de compression qui la précède, du fait des conversions de mode. Ainsi, une estimation de la vitesse basée sur le temps d'arrivée serait peu précise, d'où l'importance d'avoir accès à des propagations à travers différentes épaisseurs du même matériau. En effet, il n'est dans ce cas plus nécessaire de déterminer précisément le début de l'onde de cisaillement, mais il suffit par exemple de comparer le temps d'arrivée du maximum d'amplitude de cette onde pour les différentes épaisseurs. Soit t_1 et t_2 le temps d'arrivée de ce maximum pour les épaisseurs

14. Attention cette mesure sert surtout à comparer les matériaux entre eux mais ne fournit pas de valeur intrinsèque de l'atténuation des matériaux, puisqu'il faudrait dans ce cas prendre en compte la diffraction notamment.

15. Panametrics-NDT Olympus V103

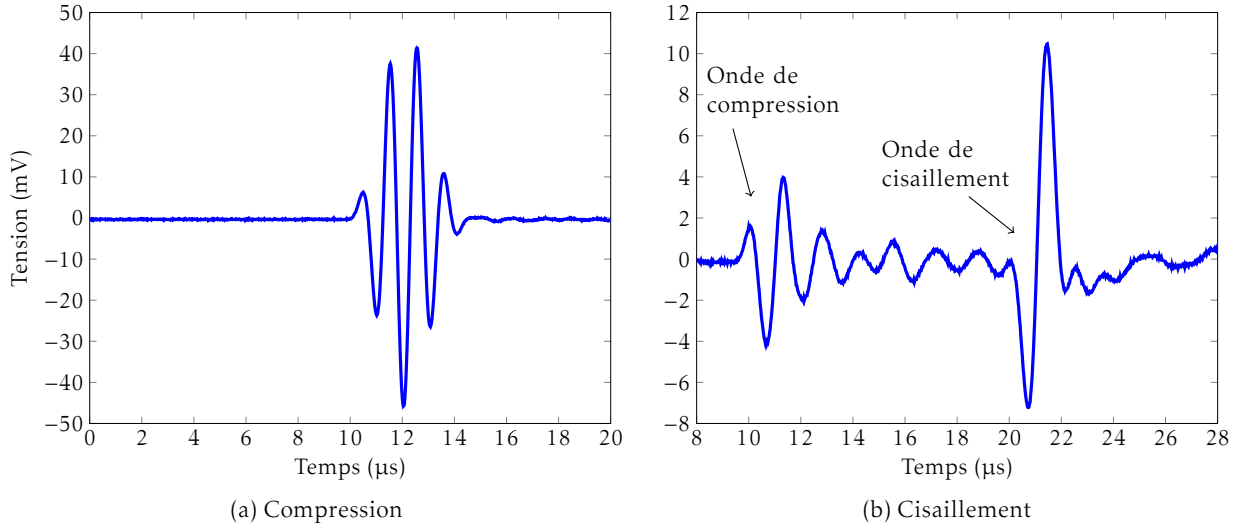


FIGURE 5.9. – Signaux obtenus lors de l'émission d'une période de sinusoïde à 1 MHz, de compression (a) ou de cisaillement (b), dans l'échantillon ds-2000 (épaisseur : 25 mm). Dans le deuxième cas, du fait de conversions de modes, le signal de sortie est composé à la fois d'une onde de compression (première arrivée) et d'une onde de cisaillement, dont le début est délicat à déterminer.

L_1 et L_2 , avec $L_2 > L_1$. Alors assez naturellement il vient

$$t_2 = t_1 + \frac{L_2 - L_1}{c_T} \quad (5.2.1)$$

et donc

$$c_T = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} \quad (5.2.2)$$

Cela permet d'estimer la vitesse des ondes transversales avec une bonne précision.

Le tableau 5.1 récapitule les densités, vitesses longitudinales c_L , vitesses transverses c_T et longueurs d'atténuation l_{att} ¹⁶ de l'onde longitudinale, mesurées pour les différents blocs de matériaux. La dernière ligne reprend à titre de comparaison les valeurs de l'os dense utilisées dans toutes les simulations de cette thèse. Les résultats montrent que les matériaux ont tous des propriétés mécaniques assez proches. Cela n'est pas tellement étonnant puisque la matrice polymère, qui constitue l'essentiel du matériau, est la même dans tous les cas. D'ailleurs, les valeurs obtenues sont sensiblement les mêmes que celles disponibles dans la littérature pour les matériaux plastiques. La densité des différents matériaux est plus faible que celle de l'os dense (de 15 à 35%). De même, pour la vitesse longitudinale (de 25 à 35%) et la vitesse transverse (de 11 à 33%). C'est probablement ce dernier paramètre qui est le plus pénalisant. En effet, il y a une différence fondamentale par rapport à l'os dense, puisque la vitesse des ondes transverses est inférieure à (ou du même ordre que) la vitesse dans le fluide, contrairement à l'os dense. En conséquence, la différence de comportement des structures imprimées par rapport à l'os pourrait être non seulement quantitative (vitesse, atténuation) mais aussi qualitative (observation des deux ondes par exemple). Concernant l'atténuation, plus que la valeur elle-même, qui n'a pas trop de sens car les mesures sont effectuées en champ proche et incluent donc des effets liés à la diffraction, c'est la comparaison entre les différents matériaux qui est intéressante. Ainsi, le recuit est visiblement

16. Intégrées sur toute la bande de fréquences.

Matériau	Densité	c_L (mm · μs^{-1})	c_T (mm · μs^{-1})	l_{att} (mm)
ds-2000 (a)	$1,214 \pm 0.004$	$2,55 \pm 0.05$	1.25 ± 0.02	20
dl-260 (b)	$1,338 \pm 0.004$	$2,49 \pm 0.05$	1.21 ± 0.02	19
rd-096-b (c)	$1,510 \pm 0.004$	$2,72 \pm 0.05$	1.31 ± 0.02	15
dm-220 (d)	$1,588 \pm 0.005$	$2,90 \pm 0.05$	1.39 ± 0.02	20
dm-220 recuit (e)	$1,576 \pm 0.005$	$2,96 \pm 0.05$	1.55 ± 0.02	60
ds-2000* (f)	1.485 ± 0.006	2.7 ± 0.1	non mesuré	non mesuré
os dense	1,85	4	1.8	

TABLE 5.1. – Densités, vitesses longitudinales c_L , vitesses transverses c_T et longueurs d'atténuation l_{att} de l'onde longitudinale, mesurées pour les différents blocs de matériaux. Les valeurs pour l'os dense sont également données à titre indicatif.

beaucoup moins atténuant que tous les autres matériaux, dont les longueurs caractéristiques d'atténuation sont très proches.

Si tant est que les capacités d'impression sont les mêmes pour tous les matériaux, les données du tableau tendent à privilégier le dm-220 recuit. Pour ce qui est de la tentative d'incorporation d'hydroxyapatite, les propriétés sont similaires aux autres matériaux mais avec une capacité d'impression moindre. Elle ne présente donc pas d'intérêt en l'état. Avant d'imprimer des structures semblables à l'os, et afin d'estimer les capacités de l'imprimante, nous allons tout d'abord nous intéresser à l'impression d'échantillons de structure plus simple. Il s'agit de forêts de barres, comme celles étudiées en simulation dans le chapitre précédent (§4.3.3).

5.2.6. Premières structures : des forêts de barres

Imprimer une structure constituée uniquement de barres permet dans un premier temps de simplifier la partie numérique, puisque l'échantillon peut être créé à l'aide d'un logiciel de CAO (SolidWorks dans notre cas) et donc être exporté facilement en STL. Bien que relativement simples, les échantillons ainsi créés n'en sont pas pour autant inintéressants, puisqu'ils peuvent permettre de mettre en lumière d'éventuels problèmes d'impression de fines structures. D'un point de vue ultrasonore, il est également très instructif d'étudier la propagation dans ces structures afin de comparer les résultats avec ceux obtenus dans les simulations sur ces mêmes milieux (§4.3.3). Pour simplifier la création des fichiers sous SolidWorks, le caractère aléatoire de la distribution des barres a été remplacé par une répartition régulière. Le résultat de la simulation sur une telle structure n'a cependant pas montré de différence significative par rapport à ce qui avait été observé quand la distribution était aléatoire.

Bien évidemment, contrairement aux simulations, il faut que l'ensemble de la structure soit solidaire pour qu'elle puisse être imprimée. Cela nécessite donc de mettre des plaques aux extrémités des barres pour les maintenir. Ce n'est pas sans conséquence sur l'impression de la structure. En effet, comme la structure en cours est à chaque fois plongée dans le bain de résine pour créer la couche supplémentaire, la pression exercée sur la plaque entraîne une compression des barres, pas encore suffisamment solidifiées avant le passage au four UV. La structure est alors déformée, comme le montre la figure 5.10.

Pour pallier ce problème, les forces de poussée ont été diminuées en faisant en sorte que la pièce reste constamment immergée dans la résine, et une armature de soutien a été ajoutée. D'autre part, la dimension transverse des barres a été fixée à $300\mu\text{m}$, contre $100\mu\text{m}$ dans les simulations du chapitre précédent (§4.3.3). Là encore, aucune différence n'a cependant été observée en simulation entre les deux tailles de barres sur l'observation des deux ondes. C'est assez logique puisque ces

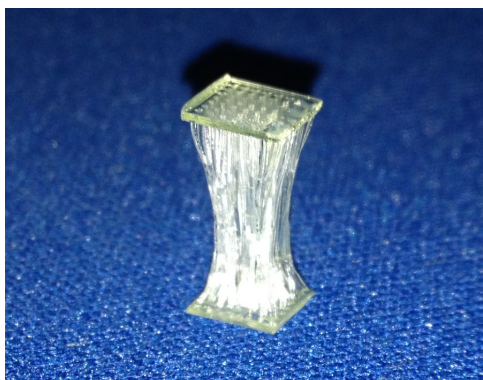


FIGURE 5.10. – Conséquence de la force de pression exercée par la résine sur la plaque du dessous de l'échantillon, lors de l'impression. L'échantillon est comprimé. (Photographie : J.Woittequand)

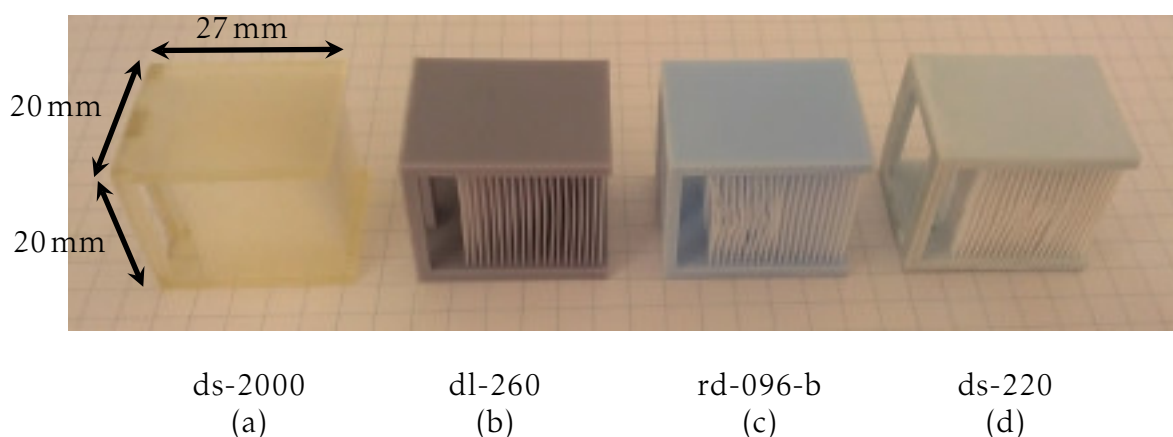


FIGURE 5.11. – Forêts de barres imprimées avec les quatre matériaux disponibles. Section des barres : $300 \times 300 \mu\text{m}^2$. (a) à (b) : Impression de bonne qualité. (c) et (d) : Impression beaucoup moins propre, les barres plient et se délaminent.

barres restent suffisamment fines devant la longueur d'onde pour rester dans le régime basse fréquence des guides d'onde [65]. Le nombre de barres a été fixé de telle sorte que la fraction solide du milieu soit de 10%. La figure 5.11 montre les forêts de barres ainsi imprimées avec les quatre matériaux à disposition. La photographie ne permet pas forcément de le voir pleinement, mais les deux premiers échantillons (a) et (b) sont assez fidèles à la structure numérique, tandis que les deux autres, (c) et (d), contiennent beaucoup plus de malfaçons, comme des barres pliées ou collées les une aux autres. Le problème vient des résines liquides, qui ne présentent pas toutes les mêmes propriétés. Globalement, les résines avec les plus grandes valeurs de vitesses sont celles qui sont les plus chargées de particules. Mais, de ce fait, elles sont également plus visqueuses, ce qui rend l'impression plus délicate. Comme les propriétés des matériaux sont semblables (hormis l'atténuation pour le recuit), c'est la résine grise qui a été utilisée par la suite, puisque c'est celle qui permet la meilleure qualité d'impression.

Les tests de propagation selon la direction des barres (bleu) et perpendiculaire aux barres (rouge) sont représentés sur la figure 5.12. Lorsque la propagation est dans le sens des barres (à gauche, en bleu), deux ondes sont observées, comme c'était le cas dans les simulations du chapitre précédent. Malgré la faible fraction de solide, l'onde "rapide" (première arrivée) a une amplitude comparable à celle de la deuxième onde. Cela peut s'expliquer par la présence de la plaque de

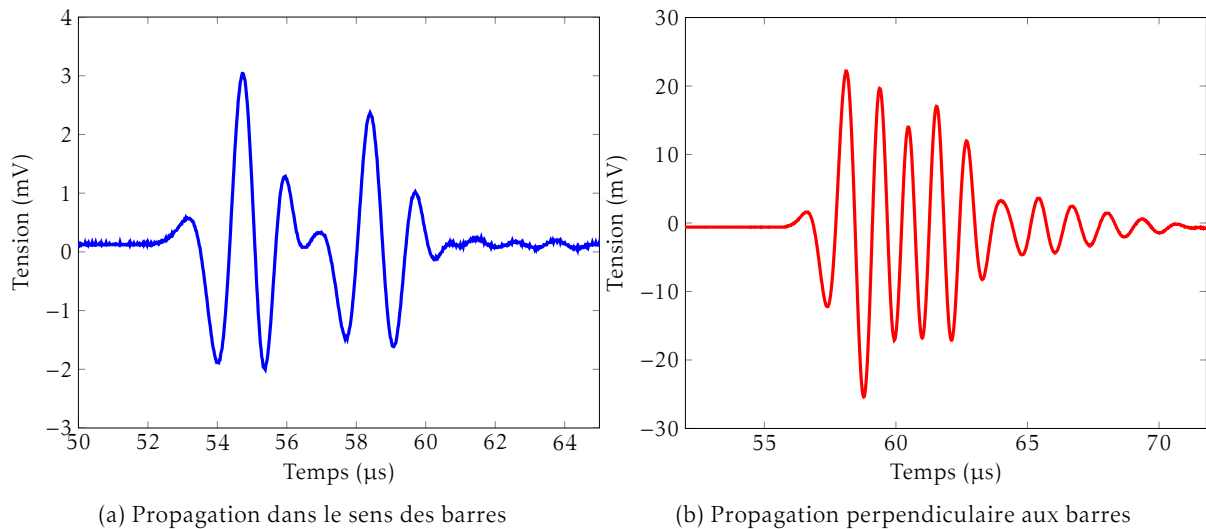


FIGURE 5.12. – Propagations à travers l'échantillon constitué de barres, de fraction solide 10%. Le signal émis est une impulsion d'une période de sinusoïde de fréquence 1,25 MHz. À gauche (bleu), propagation dans le direction des barres. À droite (rouge), propagation perpendiculaire aux barres.

solide avant les barres, qui comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, a tendance à renforcer l'onde rapide. Lorsque la propagation est perpendiculaire aux barres, le signal a une durée plus longue que l'impulsion émise (une période de sinusoïde), ce qui suggère la présence de phénomènes de diffusion sur le réseau de barres. Pour autant, on ne distingue pas clairement deux ondes comme lorsque la propagation est dans la direction des barres.

5.2.7. Duplication d'un échantillon d'os de cheval

Réalisation de l'échantillon

Après l'impression des forêts de barres, structure relativement simple, nous avons cherché à imprimer une vraie structure osseuse. Pour cela, nous avons utilisé la structure numérisée utilisée pour la simulation dans la première partie (§5.1.3). Pour l'impression 3D, cette structure a été convertie en fichier STL (ce qui a nécessité de grandes ressources de mémoire vive). Le résultat de l'impression est présenté sur la figure 5.13.

Comme le montre cette figure, le résultat est très fidèle à l'os original, ce qui est vraiment encourageant. En particulier, la porosité est bien ouverte comme pour l'os réel (il est possible de voir à travers), donc la résine liquide a été correctement évacuée. C'est l'étape la plus délicate pour l'impression d'une structure aussi poreuse. Pour y parvenir, il a fallu l'utilisation conjointe d'un aérographe, pulvérisant un mélange d'air comprimé et de solvant, et d'une pompe à vide. Cet échantillon est, à notre connaissance, le **premier échantillon synthétique d'os trabéculaire à l'échelle obtenu par impression 3D**.

Mesures ultrasonores

Grâce à la tomographie Synchrotron, nous avons une structure numérisée d'une très bonne résolution, avec toutefois l'inconvénient de limiter la taille de l'échantillon, et en particulier l'épaisseur. D'autre part, les vitesses dans la résine étant plus faibles que celles dans l'os, les éventuelles ondes lente et rapide seront d'autant moins séparées. Enfin notre échantillon n'a pas

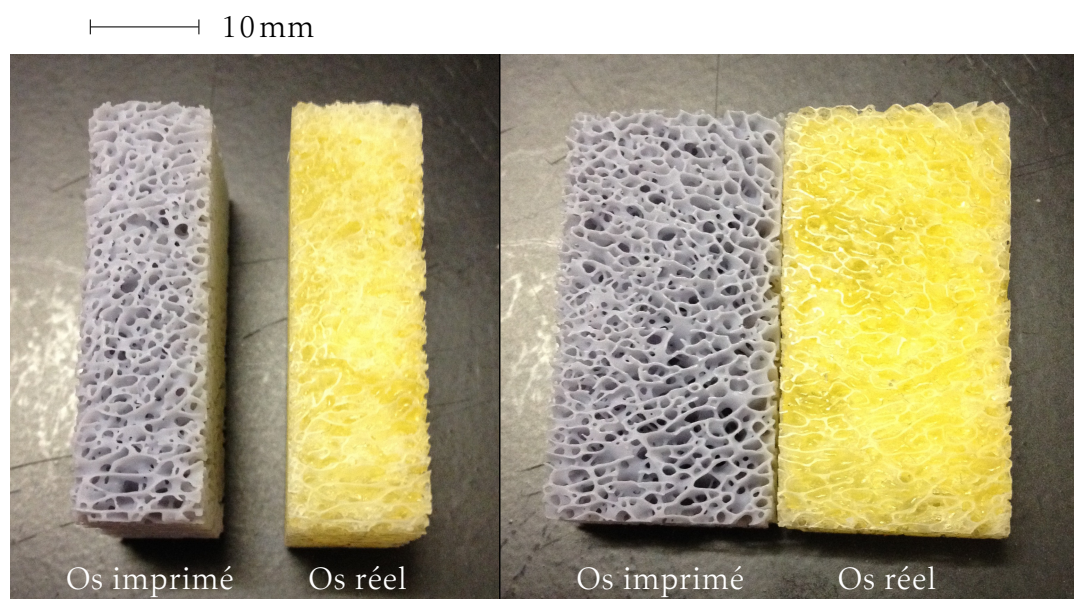


FIGURE 5.13. – Échantillon d'os trabéculaire de cheval (fémur) et sa réplique obtenue par impression 3D. (Photographies : J.Woittequand)

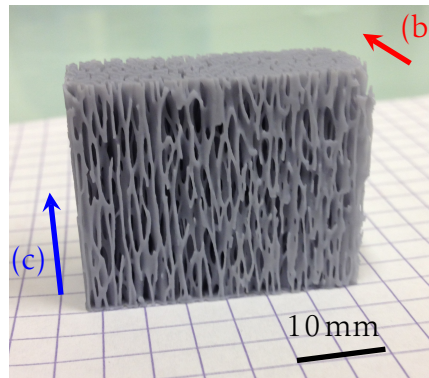
réellement d'anisotropie marquée selon la profondeur. Tout cela fait que la propagation dans cette structure n'a que peu de chance d'aboutir à l'observation de deux ondes, ce qui a été confirmé par un rapide test.

Néanmoins, la reproduction exacte de l'os de cheval avait surtout pour but de valider la possibilité d'imprimer une structure osseuse. Dans les faits, l'intérêt de l'impression 3D n'est pas forcément de reproduire fidèlement une structure déjà existante, mais de pouvoir faire varier à souhait certains paramètres. Ainsi, on peut par exemple créer une forte anisotropie en "étirant" la structure selon une direction. C'est ce que nous avons fait, en étirant la structure selon l'épaisseur d'un facteur quatre. Cela a également l'avantage d'agrandir l'échantillon, permettant une propagation sur une plus grande distance. La figure 5.14 montre cette structure étirée ainsi que les résultats obtenus lors de la propagation selon deux directions perpendiculaires. Alors que la propagation selon la direction (b) ne présente visiblement qu'une seule onde, deux ondes sont en revanche observées lorsque la propagation est selon la direction d'anisotropie. Même si ces résultats sont à prendre avec précaution, notamment du fait des potentiels effets de bords (une des dimensions transverses est de l'ordre du diamètre des transducteurs), le fait que la première onde soit plus basse fréquence que la deuxième laisse penser qu'il pourrait bien s'agir d'une onde rapide et d'une onde lente. Le milieu imprimé permettrait donc d'observer le phénomène des deux ondes.

5.3. Conclusion

Les expériences menées sur l'échantillon de cheval ont permis de confirmer qu'il fallait prendre en compte la diffusion multiple dans l'os trabéculaire. Il avait déjà été montré que c'était le cas à 3MHz [33], le résultat est maintenant élargi à des fréquences jusqu'à 1,5MHz. Les expériences en transmission ont de leur côté permis de montrer la difficulté d'observer les deux ondes longitudinales, surtout dans un échantillon dont l'anisotropie n'est pas clairement établie.

À côté de ces expériences sur échantillons d'os réels, la possibilité d'avoir des échantillons parfaitement contrôlés, de structure similaire à celle de l'os trabéculaire, serait un atout considérable



(a) Structure d'os allongé d'un rapport 4 selon la direction verticale. Les flèches bleue et rouge indiquent les directions de propagation des figures (b) et (c). (Photo : J.Woittequand)

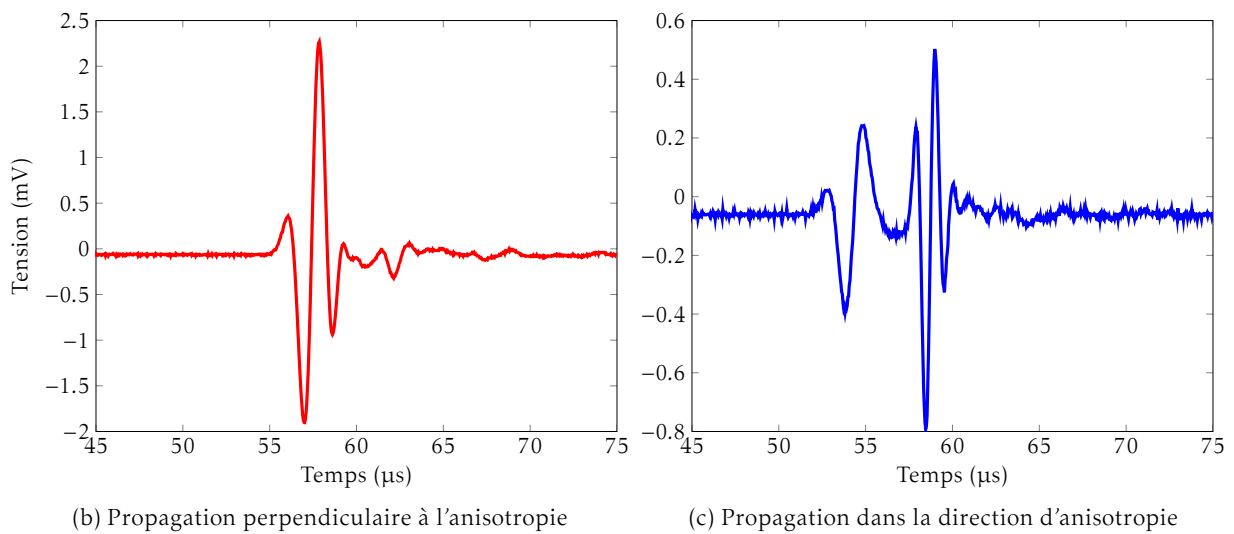


FIGURE 5.14. – Propagations à travers une structure d'os (a) dont l'anisotropie été artificiellement créée. Le signal émis est une impulsion d'une période de sinusoïde de fréquence 1 MHz. (b) Propagation selon la direction d'anisotropie. (c) Propagation perpendiculaire à la direction d'anisotropie.

dans la quête du diagnostic de l'ostéoporose. Jusqu'à maintenant, il n'existe pas de telle structure parfaitement contrôlable, anisotrope, qui reproduise avec suffisamment de fidélité les propriétés ultrasonores de l'os poreux. Néanmoins, l'impression 3D, en plein essor, a le potentiel pour y parvenir. Les tests d'impression que nous avons effectués sont très prometteurs, la structure osseuse que nous avons cherché à répliquer ayant été fidèlement reproduite. En tirant profit de la flexibilité de cet outil pour modifier la structure, il nous a ainsi vraisemblablement été permis d'observer pour la première fois la propagation de deux ondes longitudinales dans une réplique d'os trabéculaire imprimée.

Il reste cependant quelques freins à une utilisation optimale de l'impression 3D. Le premier est le poids des fichiers nécessaires à l'impression, qui limite la taille que peut prendre la structure. Une prise en charge différente des données (impression directement à partir des données brutes) pourrait permettre de réduire considérablement l'impact de ce problème. Vient ensuite le problème du matériau d'impression. Ceux qui étaient disponibles pour notre imprimante avaient des propriétés plus proches du plastique que de l'os. La propagation des ultrasons s'en trouve nécessairement modifiée. Néanmoins, de nombreux projets d'impression 3D se développent à travers le monde avec toujours plus de matériaux différents, ce qui laisse supposer que ce problème devrait également trouver une solution. L'enjeu est cependant de pouvoir changer de matériau tout en gardant une résolution suffisamment élevée. Les travaux déjà existants sur l'impression de supports osseux incitent à l'optimisme¹⁷.

17. <http://www.nature.com/nmat/journal/v4/n7/pdf/nmat1421.pdf>

CONCLUSION

L'os trabéculaire est une structure poreuse très complexe. Elle est anisotrope, hétérogène et multi-échelles. En conséquence, comprendre la propagation des ultrasons dans un tel milieu n'est pas simple. Il existe bien quelques outils théoriques, les théories d'ondes en milieux poreux et de diffusion multiple, mais aucune ne permet de rendre totalement compte de la complexité de l'os trabéculaire.

Nous avons dans un premier temps abordé les théories d'ondes en milieux poreux. Ces théories, et notamment leur fer de lance, la théorie de Biot, méritent sans conteste de s'y intéresser dans le cadre de l'os trabéculaire. La prédiction d'un phénomène aussi singulier que la propagation des deux ondes longitudinales dans le milieu poreux est un argument indéniable. Ceci est d'autant plus vrai que les vitesses théoriques correspondent plutôt bien à celles obtenues expérimentalement. D'un autre côté, l'atténuation prévue par ces théories n'est pas en accord avec celle observée dans l'os trabéculaire, et la mesure de tous les paramètres nécessaires à la théorie de Biot reste un frein majeur.

Ensuite, nous nous sommes intéressés aux théories de diffusion multiple. En effet, les expériences menées sur un échantillon d'os de cheval ont confirmé des expériences précédentes, montrant la nécessité de prendre en compte la diffusion dans l'os trabéculaire pour les fréquences utilisées en clinique. C'est une piste sérieuse pour expliquer l'atténuation dans l'os trabéculaire et le fait que la théorie de Biot échoue à la prédire. Le problème est que ces théories sont difficilement applicables sans hypothèses simplificatrices. Nous avons vu l'Independent Scattering Approximation, la plus simple d'entre elles, qui permet de correctement prédire vitesse et coefficient d'atténuation pour des milieux poreux de faible fraction solide, comme c'est le cas de l'os trabéculaire, lorsqu'une seule onde est observée. En revanche, elle ne prévoit pas la propagation de deux ondes longitudinales.

Les théories de diffusion multiple nous ont conduits sur un autre terrain, celui du calcul du champ diffusé par des cylindres elliptiques de grand rapport d'aspect. Ce problème possède des résolutions théoriques, mais l'application pratique est soumise à de fortes instabilités numériques. Nous avons mis en évidence ces instabilités, et aussi proposé un moyen de les repousser avec le calcul numérique en précision arbitraire. L'apport de cette méthode est indéniable, même si elle demande des ressources informatiques très lourdes, qui limitent fortement son utilisation à l'heure actuelle.

L'étude du champ diffusé par des objets elliptiques était aussi motivée par le modèle numérique de structures poreuses anisotropes que nous avons développé. Face aux difficultés de compréhension de la propagation ultrasonore dans l'os trabéculaire, et de l'application des théories existantes, nous avons opté pour un travail plus en amont sur des structures simplifiées. L'idée était d'utiliser un modèle gouverné par peu de paramètres dont on accepte que le comportement ne soit pas strictement identique à l'os tant que les caractéristiques principales sont respectées. Pour cela, l'outil numérique nous a apporté sa grande flexibilité d'utilisation. Grâce à cette approche, nous avons pu observer l'influence de paramètres clés (anisotropie, fraction solide, connectivité et élasticité de la phase solide) sur l'apparition de deux ondes. Nous avons également pu mettre à l'épreuve les théories pré-citées dans le cadre de ce modèle, sans aucun ajustement de paramètre, ce qui n'avait jusqu'à présent jamais pu être réalisé. Cela a permis de montrer que la limite de validité de la théorie de Biot est atteinte pour ce genre de milieux, ce qui se manifeste par

certain résultats correctement prédits (vitesses) tandis que d'autres ne le sont plus vraiment (déphasage des composantes dans les deux phases). D'autre part, le comportement de ces modèles laisse penser que l'onde rapide pourrait être guidée par les travées osseuses, tandis que l'onde lente serait essentiellement portée par la phase fluide. Les vitesses dans des milieux constitués de barres solides (archétype du guide d'onde) entourées de fluide ont d'ailleurs été correctement prédites par la théorie de Biot. Ces résultats suggèrent que la propagation dans l'os trabéculaire obéit à une théorie plus générale que celles citées ici, liée aux ondes guidées, qui prend en compte la diffusion, et dont la théorie de Biot serait un cas particulier basse fréquence.

Enfin, au delà de la théorie, les mesures expérimentales dans l'os trabéculaire sont délicates. L'os réel n'est pas statistiquement homogène, la direction d'anisotropie est changeante et pas toujours évidente à déterminer. Pour faire émerger l'onde cohérente, il faut moyenner, mais un os a une taille limitée, ce qui signifie qu'il restera toujours une part d'incohérent en pratique. Discerner les deux ondes, lorsqu'elles existent, nécessite une résolution temporelle suffisante, donc un milieu d'épaisseur suffisante, sans pour autant qu'une des deux ondes soit trop atténuée. Expérimentalement, il n'est pas possible d'enregistrer la propagation en fonction de la distance de propagation, comme ce que nous avons fait en simulation, qui nous rajoutait une dimension supplémentaire précieuse. Pour compenser il est nécessaire de mettre en place des algorithmes de séparation des deux ondes [75]. Enfin, il faut trouver le site de mesure adéquat, prendre en compte la propagation dans la peau, l'os cortical, ... Les défis expérimentaux à relever sont nombreux pour espérer des mesures *in vivo* pertinentes dans le futur.

Pour relever ces défis, avoir des échantillons modèles contrôlables et modifiables à souhait serait un atout. Dans cette optique, l'impression 3D est très prometteuse. Nous avons vu qu'il était possible de recréer très fidèlement une structure d'os trabéculaire, à l'échelle, grâce à cette technique. Plus que cela, nous avons pu observer ce qui était vraisemblablement la propagation de deux ondes longitudinales dans une réplique d'os. Les barrières à franchir dans ce domaine sont les ressources informatiques, qui limitent la taille des échantillons imprimables, et l'utilisation de matériaux d'impression plus proches de l'os. C'est le prix à payer pour pouvoir détecter précocement l'ostéoporose, enjeu sanitaire majeur des décennies à venir.

Dernier point, les travaux de cette thèse ont été abordés sous l'angle de la propagation dans l'os trabéculaire, champ d'application directement visé. Néanmoins, les résultats sont plus généraux, et pourraient tout aussi bien s'appliquer à d'autres types de matériaux poreux (voire plus généralement biphasiques) anisotropes. Le modèle numérique poreux pourrait notamment être utile pour étudier la propagation dans l'os cortical. Ces résultats pourraient également trouver leur utilité dans le domaine du contrôle non destructif. En effet, les matériaux composites, en utilisation croissante dans de nombreux domaines de l'industrie (aérospatiale ou automobile notamment), sont également biphasiques et bien souvent anisotropes.



GUIDE DES SIMULATIONS

A.1. Paramètres généraux

A.1.1. Brève présentation de SimSonic

Développé par Emmanuel Bossy au cours de sa thèse et apparaissant pour la première fois dans la référence [76], SimSonic est une suite de logiciels de simulation numérique de la propagation d'ondes élastiques. Elle est composée de deux versions, SimSonic2D et SimSonic3D, pour des simulations respectivement à deux et trois dimensions. Les codes sources sous licence GNU GPL sont mis à disposition gratuitement et librement en ligne à l'adresse suivante : <http://www.sims sonic.fr>. Une documentation et des exemples sont également disponibles pour faciliter la prise en main.

Il existe plusieurs méthodes de simulation de la propagation d'ondes dans un milieu. Elles diffèrent essentiellement selon la façon dont le milieu est discrétisé et le domaine dans lequel les calculs sont menés (temporel ou fréquentiel). SimSonic est une méthode dite FDTD, sigle anglais signifiant "méthode aux différences finies dans le domaine temporel". Les différences finies désignent la façon dont l'équation d'onde élastique est approximée. Cette équation d'onde est d'ailleurs linéaire dans SimSonic, et, pour ce qui nous concerne, sans absorption. Le calcul dans le domaine temporel produit directement des signaux semblables à des mesures expérimentales avec une durée finie et donc une largeur spectrale non nulle.

Dans SimSonic le maillage du milieu est cartésien et régulier. Là encore c'est donc relativement simple à prendre en main, la contrepartie étant que ce maillage n'est pas toujours très bien adapté à la géométrie étudiée. C'est notamment le cas pour décrire des formes arrondies comme les ellipses et ellipsoïdes qui interviennent tout au long de cette thèse. Il est donc nécessaire de mailler finement les milieux pour obtenir une approximation correcte de la géométrie souhaitée.

Enfin, pour chaque simulation il est important de spécifier des conditions de bord. Si rien n'est spécifié, l'onde sera totalement réfléchie par le bord (bord rigide). Cette réflexion artificielle peut poser problème puisqu'elle risque d'interférer avec les signaux d'intérêt. L'utilisation d'une PML (Perfectly Matched Layer), couche fortement absorbante placée au contact du bord, permet de s'affranchir de ce problème. Cette condition sera abondamment utilisée dans nos simulations. Mais il est également possible de spécifier que le bord est symétrique, particulièrement utile pour simuler un milieu infini et une onde parfaitement plane.

A.1.2. Paramètres mécaniques

Pour rendre compte de ses propriétés mécaniques, chaque phase du milieu est décrite par sa densité et les coefficients du tenseur élastique. Ces paramètres fixent alors la vitesse des ondes

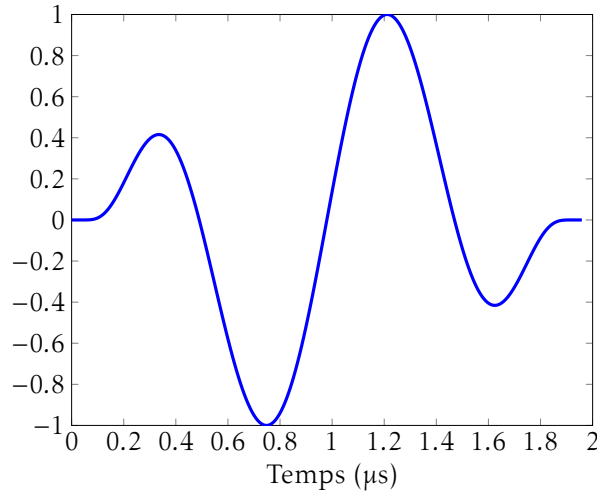


FIGURE A.1. – Signal d'émission utilisé pour les simulations SimSonic : impulsion de fréquence centrale 1 MHz constitué de deux périodes de sinusoïdes modulées par une gaussienne.

longitudinale et transverse. Sauf mention contraire, tout au long de cette thèse les deux phases (solide et fluide) constituant les milieux simulés sont intrinsèquement isotropes¹, et leurs propriétés sont :

fluide (eau)	solide (os)
$\rho_f = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_s = 1850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$K_f = 2,25 \text{ GPa}$	$K_s = 29,6 \text{ GPa}$
	$N_s = 5,994 \text{ GPa}$
$c_0 = 1,5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$	$c_L = 4 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$
	$c_T = 1,8 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$

ρ_f et ρ_s sont les masses volumiques du fluide et du solide, K_f le module de compression du fluide, K_s et N_s les modules de compression et cisaillement du solide. c_0 , la vitesse du son dans le fluide, et c_L et c_T , les vitesses des ondes longitudinale et transverse dans le solide, sont reliées aux autres paramètres par les formules suivantes :

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_f}{\rho_f}} \quad , \quad c_L = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_s}} \quad , \quad c_T = \sqrt{\frac{N_s}{\rho_s}} \quad (\text{A.1.1})$$

A.1.3. Signal d'émission

La figure A.1 représente le signal d'émission utilisé dans les simulations. Il s'agit d'une impulsion de fréquence centrale 1 MHz, constituée d'une période de sinusoïde modulée², afin d'atténuer les discontinuités qui pourraient apparaître en début et fin de signal. L'échantillonnage des signaux temporels dépend du pas spatial Δx choisi. En effet, pour satisfaire la condition CFL³ de

1. Attention cela n'empêche pas pour autant que le milieu poreux puisse être structuellement anisotrope. C'est l'arrangement entre les deux phases qui est à l'origine de l'anisotropie.

2. Entre 0 et $t_f = 2 \mu\text{s}$, le signal vaut

$$s(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{t_f}\right) e^{\frac{t_f^2}{t(t-t_f)}} \quad (\text{A.1.2})$$

3. Courant–Friedrichs–Lewy

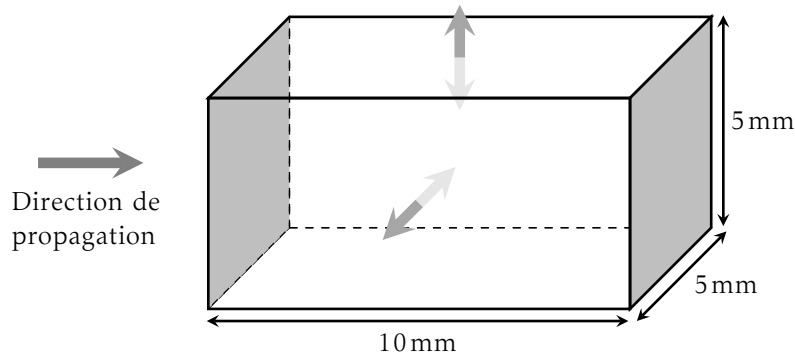


FIGURE A.2. – Caractéristiques des milieux 3D numériques étudiés. Le volume est 10 mm × 5 mm × 5 mm, la première dimension étant celle de la propagation. Une condition de symétrie (représentée par les doubles flèches) est imposée aux quatre faces des dimensions transverses (transparentes). Aux deux faces grises sont en revanche accolées des PML afin d’éviter les réflexions. À noter qu’au niveau de ces faces grises sont placées de fines couches de fluide (d’épaisseur 0,1 mm).

stabilité du calcul numérique, le pas temporel Δt doit vérifier l’inégalité

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{n}v_{\max}} \quad (\text{A.1.3})$$

avec v_{\max} la vitesse du son maximale dans le milieu. n est la dimension de la simulation ($n = 2$ en 2D et $n = 3$ en 3D). En pratique dans toutes les simulations de la thèse

$$\Delta t = 0.99 \frac{\Delta x}{\sqrt{n}v_{\max}} \quad (\text{A.1.4})$$

A.2. Simulations 3D (§1.2.1, §2.2.2, chapitre 4 & §5.1.3)

Les caractéristiques des milieux 3D simulés sont celles décrites sur la figure A.2. Les dimensions (10 mm × 5 mm × 5 mm) sont le fruit d’un compromis entre distance de propagation, moyenne spatiale et contraintes numériques. La distance de propagation doit être suffisamment grande pour espérer observer la séparation entre des éventuelles ondes lente et rapide. Les dimensions transverses doivent être suffisamment grandes pour avoir une bonne estimation de **l’onde cohérente**. Il s’agit en théorie de la moyenne d’ensemble des réalisations sur un grand nombre d’échantillons de même statistique, estimée ici à partir d’une moyenne spatiale (obtenues par intégration du signal sur tout le plan transverse), en supposant une hypothèse d’ergodicité. Enfin d’un point de vue numérique la mémoire vive de l’ordinateur de calcul limite le volume qui peut être simulé, mais surtout plus ce volume est grand plus la durée de calcul sera longue. Cela dépend bien sûr du pas spatial utilisé. Il a été fixé à 10 μm dans toutes les simulations 3D, de tel sorte qu’il soit suffisamment petit pour que son influence sur l’onde cohérente soit négligeable. Avec ce volume et ce pas spatial, le temps de calcul équivalent monoprocesseur est d’un peu plus de 4 jours. Le temps équivalent monoprocesseur permet d’avoir une durée indépendante du nombre de processeurs de la machine de calcul, permettant ainsi de comparer des calculs effectués avec différents ordinateurs. La version parallélisée de SimSonic permet en effet de déporter les calculs sur plusieurs processeurs d’une même machine, ce qui accroît en conséquence la rapidité des calculs. Ainsi avec les machines à 16 processeurs utilisées, le temps de calcul réel variait entre 6 et 7 h.

À l’entrée et la sortie du milieu (faces grises sur la figure A.2) sont placées des fines couches de fluide d’épaisseur 0,1 mm. Cela a le double avantage de pouvoir définir l’onde source à l’entrée

comme une onde de pression dans le fluide, et de s'assurer de la bonne performance des PML pour les deux faces. La contrepartie, c'est que des réflexions sont susceptibles d'être observées à l'interface entre le milieu et la fine couche de sortie. C'est particulièrement visible sur la figure 1.1(b) où le milieu n'est constitué que de solide, mais cela apparaît également pour le milieu poreux (1.1(c)). Ces réflexions ont une nature physique et ne sont donc pas des artefacts numériques liés aux conditions de bord comme on pourrait le penser, puisqu'avant et après le milieu sont disposées des PML. Aux quatre autres faces sont imposées des conditions de symétrie. Le milieu est donc dupliqué à l'infini dans les deux dimensions transverses. Il en est de même pour l'onde de pression émise dans la fine couche de fluide à l'entrée ce qui fait d'elle une onde parfaitement plane. Les dimensions transverses sont considérées suffisamment grandes devant la longueur de corrélation des hétérogénéités pour que la périodicité du milieu n'affecte pas le résultat.

L'utilisation de l'outil numérique permet de choisir la nature du signal enregistré (champ de contrainte ou de vitesse). Pour ces simulations, il s'agit du coefficient σ_{11} du tenseur des contraintes (la direction 1 étant la direction de propagation). De cette façon les ondes observées sont nécessairement des ondes de compression, polarisées longitudinalement. Aussi, lorsque deux ondes sont observées, il s'agit bien des ondes lente et rapide, indépendamment de la présence potentielle d'une onde transverse. 100 récepteurs sont répartis uniformément à l'intérieur du milieu, intégrant le signal sur tout le plan transverse à la propagation pour avoir une estimation de l'onde cohérente. L'enregistrement des signaux à l'intérieur du milieu et à diverses profondeurs est un autre atout spécifique à l'outil numérique. Cela permet d'obtenir des diagrammes à deux dimensions, comme ceux observés sur la figure 1.1 (distance de propagation en ordonnée, temps en abscisse). Nous verrons que c'est bien plus avantageux qu'un simple signal temporel pour mieux observer la séparation des ondes lente et rapide. Sur ces diagrammes les signaux sont renormalisés par l'amplitude d'une onde dans l'eau.

A.3. Simulations 2D (chapitre 4)

Les milieux modèles du chapitre 4 ont été développés à la fois à deux et trois dimensions, les diffuseurs étant alors respectivement des ellipses ou des ellipsoïdes. La légère différence dans le cas des simulations 2D est que l'estimation de l'onde cohérente provient à la fois d'une moyenne spatiale (comme en 3D), mais aussi d'une moyenne temporelle. En effet, pour chaque milieu étudié 100 cartes aléatoires sont générées. Chacune de ces cartes a une épaisseur de 10 mm dans la direction de propagation (comme en 3D) et une largeur de 200 mm dans la direction transverse. Ainsi, moyenne spatiale et moyenne d'ensemble cumulées, l'onde cohérente est estimée à partir de la moyenne sur plus de 13000 longueurs d'onde dans l'eau. Le reste est similaire aux simulations à trois dimensions : condition de symétrie dans la direction transverse, PML dans la direction de propagation avec une fine couche de fluide au début et à la fin de la carte, et 100 récepteurs de la contrainte dans la direction de propagation sont répartis uniformément sur toute l'épaisseur du milieu, intégrant le signal sur toute la direction transverse.

A.4. Calcul du champ diffusé par un objet (§4.3 & chapitre 3)

A.4.1. Principe

L'Independent Scattering Approximation (ISA), première approximation de la théorie de diffusion multiple, permet sous certaines conditions de calculer le vecteur d'onde effectif d'un milieu composé de diffuseurs identiques dans une matrice environnante. Cette description correspond

tout à fait aux milieux modèles, développés dans le chapitre 4, constitués d'ellipses (2D) ou ellipsoïdes (3D) d'os dans l'eau. L'ISA requiert la connaissance du comportement diffusant des objets qui constituent le milieu, et plus précisément le champ diffusé vers l'avant.

Selon la forme de l'objet, il peut exister des méthodes analytiques ou semi-analytiques pour calculer le champ diffusé. Le chapitre 3 de cette thèse est d'ailleurs entièrement consacré au calcul semi-analytique du champ diffusé par des ellipses. Mais il est également possible d'utiliser SimSonic pour estimer le champ diffusé par un objet. Cela est particulièrement utile quand l'amplitude diffusée ne peut pas être calculée simplement de manière semi-analytique, comme c'est le cas pour les ellipsoïdes. C'est donc l'approche que nous avons adoptée pour appliquer l'ISA à nos milieux modèles 3D (§4.3, [54]). De même SimSonic est utilisé dans le chapitre 3 en tant que référence pour étudier l'approche semi-analytique dans le cas des ellipses (2D). Avant d'aborder les spécificités des simulations dans chacun des cas, voyons d'abord le principe de cette approche, globalement le même dans les deux cas.

Le milieu simulé est constitué du diffuseur (ellipsoïde ou ellipse) entouré du fluide environnant. Une onde plane incidente p_{inc} est générée dans le fluide en direction du diffuseur. Des récepteurs ponctuels permettent ensuite d'enregistrer la pression dans le fluide aux endroits voulus. Néanmoins, la pression enregistrée p_{tot} n'est pas directement la pression diffusée p_s puisqu'elle contient également l'onde incidente p_{inc} : $p_{\text{tot}} = p_{\text{inc}} + p_s$. Afin d'isoler la pression diffusée, il faut effectuer une simulation référence dans le milieu sans diffuseur, pour laquelle les mêmes récepteurs enregistrent cette fois uniquement p_{inc} . La soustraction entre les champs avec et sans diffuseur permet d'obtenir p_s .

Il reste cependant une étape. Les signaux émis et enregistrés ne sont pas monochromatiques, car de durée finie. Or pour l'ISA tout comme pour la comparaison avec les méthodes semi-analytiques, il est nécessaire d'avoir le champ diffusé à une fréquence donnée. Pour cela il reste à passer dans le domaine fréquentiel à travers une transformée de Fourier et sélectionner la composante de la fréquence désirée. Enfin, cette composante est renormalisée par celle de même fréquence dans le spectre de l'onde incidente. Au passage, le calcul dans le domaine temporel est un gros avantage car le champ diffusé peut être calculé pour toutes les fréquences contenues dans la bande passante à partir d'une seule simulation⁴.

A.4.2. Champ diffusé par les ellipses (2D, chapitre 3)

Paramètres des simulations

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au calcul semi-analytique de la diffusion par des cylindres elliptiques (appelés plus simplement ellipses par la suite). Ces calculs numériques sont soumis à de fortes instabilités qui rendent le calcul du champ diffusé, notamment pour de longues ellipses, particulièrement complexe. Afin de vérifier l'exactitude des résultats apportés par cette technique, il est important de les comparer avec une solution fiable quel que soit le diffuseur. L'approche SimSonic, très peu dépendante de la taille et la forme du diffuseur, est pour cela très intéressante.

Le principe générale a déjà été décrit dans les grandes lignes au paragraphe A.4.1. Quelques précisions sont cependant nécessaires. Pour reconstituer l'ensemble du diagramme de rayonnement, le diffuseur est situé au centre d'un cercle de 128 récepteurs, dont le rayon a été fixé à $r = 10\text{mm}$. En conséquence, il est difficilement concevable d'utiliser des conditions de symétrie pour avoir une onde parfaitement plane. Il faudrait une dimension transverse très grande pour être sûr que tous les récepteurs sont suffisamment éloignés des bords de symétrie. Les conditions de symétrie sont donc remplacées par des PML, et l'onde émise est apodisée. Il est important

4. Deux simulations si on compte la simulation référence.

dans ce cas de bien prendre la référence dans le fluide seul pour chacun des récepteurs, puisqu'avec l'apodisation l'onde incidente est susceptible de varier d'un récepteur à l'autre. La taille des cartes est $25\text{ mm} \times 25\text{ mm}$, avec le diffuseur placé au centre.

Dernier point : le choix du pas spatial. La discrétisation du contour de l'ellipse entraîne une différence de forme et surtout de taille par rapport au diffuseur théorique, alors qu'il est décrit par une expression exacte dans la méthode semi-analytique. Pour minimiser ce problème, il faut utiliser un pas spatial le plus petit possible. L'idéal est de s'assurer que le pas est suffisamment fin pour que la solution en soit indépendante. Néanmoins il y a deux échelles dans ces simulations. Tout d'abord celle des objets étudiés, de petite taille (généralement de l'ordre de la centaine de microns). Ensuite, celle de la distance d'observation $r = 10\text{ mm}$. Il faut donc utiliser un pas spatial suffisamment fin pour décrire correctement le diffuseur tout en prenant une carte suffisamment grande pour contenir le cercle des récepteurs. De ce fait, les ressources informatiques (mémoire vive) et le temps de calcul deviennent des paramètres importants à prendre en compte. Un compromis a été trouvé, avec un pas spatial $\Delta x = 2\mu\text{m}$ pour lequel la convergence n'est pas encore totale, mais qui permet une bonne estimation du champ diffusé en un temps convenable. À cette résolution et pour une durée de simulation de $100\mu\text{s}$, le temps de calcul équivalent monoprocesseur est déjà d'environ 20 jours pour chaque diffuseur élastique et 6 jours pour un diffuseur rigide⁵.

Estimation de l'erreur relative sur le champ diffusé calculé avec SimSonic

L'erreur de la solution SimSonic peut être estimée en étudiant le diffuseur élastique circulaire, dont la résolution analytique permet d'avoir une référence précise (§3.1.1). Comme c'est une technique de décomposition modale, il faut juste s'assurer que l'ordre de troncature est suffisamment élevé pour que la convergence soit atteinte. La figure A.3(a) compare le champ diffusé à une distance $r = 10\text{ mm}$ par un disque d'os de rayon $a = 0,05\text{ mm}$, calculé avec SimSonic (pointillés bleus) et avec la formule analytique pour $N = 60$ (trait rouge). La figure A.3(b) procède de même avec un disque rigide pour lequel l'erreur peut être différente car les conditions à la frontière du diffuseur ne sont pas traitées de la même façon. Dans les deux cas les diagrammes sont relativement proches mais pas identiques, comme attendu. En effet la surface du diffuseur discrétisé est $S_{\text{sim}} = 0,0085\text{ mm}^2$ contre $S_{\text{th}} = 0,0079\text{ mm}^2$ en théorie, ce qui entraîne une surestimation du champ diffusé. Pour tenir compte de ce biais, la courbe en pointillés noirs montre le champ diffusé calculé à partir de SimSonic, corrigé par le rapport des surfaces $S_{\text{th}}/S_{\text{sim}}$. Visuellement, l'erreur sur le module des champs est moindre. Cette correction n'est bien sûr qu'une approximation rendue possible parce que le diffuseur discrétisé n'est pas si éloigné du diffuseur théorique.

Pour quantifier l'écart entre le champ calculé avec SimSonic et la référence analytique, avec et sans correction, nous définirons les erreurs moyennes relatives⁶ suivantes :

$$\overline{\Delta}_{\text{sim}} = \frac{\sum_{n=0}^{359} |P_s^{\text{sim}}(\theta_n) - P_s^{\text{th}}(\theta_n)|}{\sum_{m=0}^{359} |P_s^{\text{th}}(\theta_m)|} \quad (\text{A.4.1})$$

$$\overline{\Delta}_{\text{sim}}^{\text{corr}} = \frac{\sum_{n=0}^{359} |(S_{\text{th}}/S_{\text{sim}})P_s^{\text{sim}}(\theta_n) - P_s^{\text{th}}(\theta_n)|}{\sum_{m=0}^{359} |P_s^{\text{th}}(\theta_m)|} \quad (\text{A.4.2})$$

où $\theta_n = \frac{n\pi}{180}$ et P_s^{sim} et P_s^{th} sont les pressions diffusées calculées respectivement par l'approche SimSonic et l'approche analytique. Ces erreurs sont répertoriées dans le tableau suivant :

5. Ce qui correspond à des durées réelles respectives d'environ 27 h et 9 h de calculs sur 16 processeurs en parallèle.

6. Le résultat est ainsi indépendant de la distance r d'observation, sous réserve qu'elle est suffisante pour être en champ lointain.

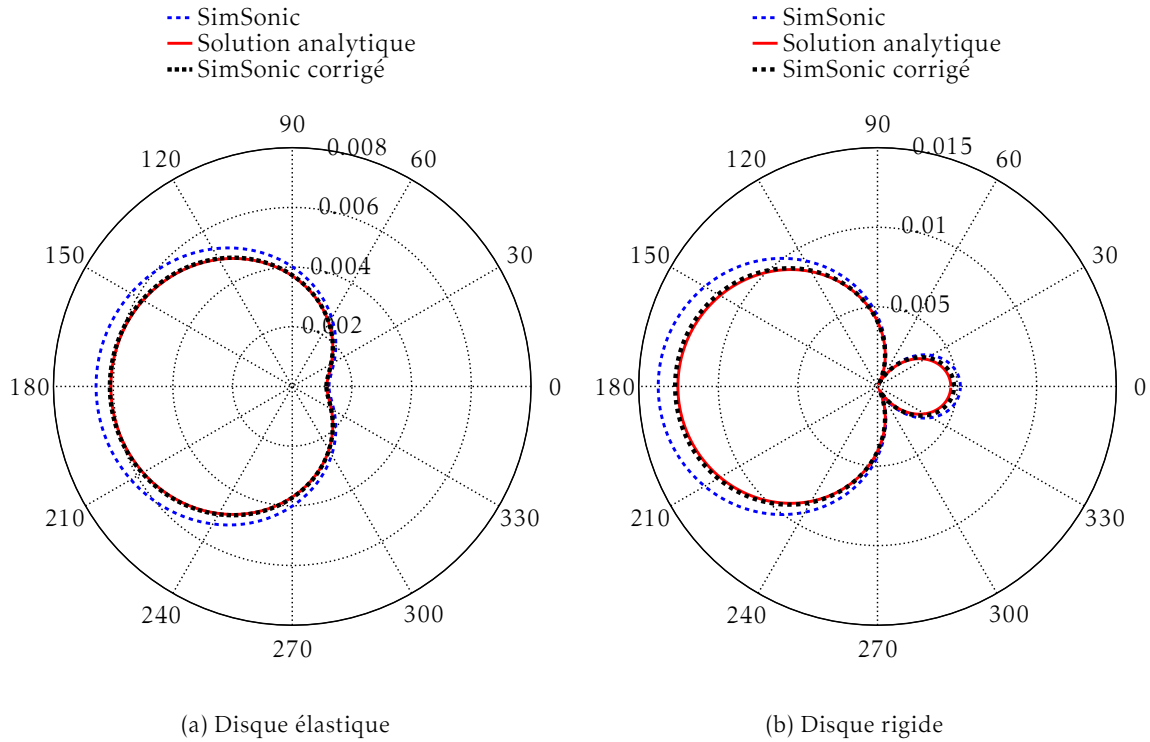


FIGURE A.3. – Diagramme de rayonnement (module du champ diffusé) à 1 MHz et 10 mm du centre d'un disque de rayon $a = 0,05$ mm élastique (a) ou rigide (b). En bleu pointillé, solution calculée avec SimSonic. En rouge, solution analytique utilisée comme référence, avec une série tronquée à $N = 60$. En noir pointillé, solution calculée avec SimSonic corrigée pour tenir compte de la différence de surface engendrée par la discrétisation.

Élastique	Rigide
$\overline{\Delta}_{\text{sim}} = 8,1\%$	$\overline{\Delta}_{\text{sim}} = 11,6\%$
$\overline{\Delta}_{\text{sim}}^{\text{corr}} = 1,1\%$	$\overline{\Delta}_{\text{sim}}^{\text{corr}} = 5,7\%$

Les calculs confirment l'impression visuelle de la figure A.3. Pour les deux diffuseurs, l'erreur est bien plus grande sans la correction sur la surface des diffuseurs. Si après correction l'erreur est relativement faible dans le cas du diffuseur élastique $\overline{\Delta}_{\text{sim}}^{\text{corr}} = 1,1\%$, elle reste plus élevée pour le diffuseur rigide $\overline{\Delta}_{\text{sim}}^{\text{corr}} = 5,7\%$. Cela est dû aux conditions à l'interface entre le diffuseur et le fluide, traitées différemment dans les deux cas.

Tout au long du chapitre 3 les champs issus de SimSonic sont les champs corrigés $P_s^{\text{num}} = (S_{\text{th}}/S_{\text{sim}})P_s^{\text{sim}}$. Les deux exemples traités ici nous donnent une idée de la confiance qui peut être accordée à ces solutions : elles ne sont pas parfaites mais permettent d'avoir un ordre d'idée du champ attendu.

A.4.3. Champ diffusé vers l'avant par les ellipsoïdes (3D, §4.3)

Pour appliquer l'ISA à nos milieux modèles (§4.3), la mise en pratique de la méthode décrite au début de cette partie diffère un peu du cas à deux dimensions. Deux cas de figure sont étudiés, selon que le grand axe du diffuseur est perpendiculaire ou parallèle au sens de propagation de l'onde. Le pas spatial est le même que celui utilisé pour les milieux modèles, à savoir $\Delta x = 10\mu\text{m}$ ⁷.

Contrairement au cas 2D, l'onde plane sera ici simulée à l'aide de conditions de symétrie dans les dimensions transverses. En effet, les ressources de mémoire vive nécessaires pour la simulation 3D ne permettent pas des dimensions transverses suffisamment grandes pour que l'apodisation de l'onde émise soit suffisamment efficace. Heureusement, seule la diffusion vers l'avant est nécessaire pour appliquer l'ISA. Le signal enregistré au niveau du capteur placé devant le diffuseur sera simplement fenêtré pour éliminer les artefacts numériques provenant de la symétrisation du diffuseur. Cela suppose des dimensions transverses suffisamment grandes. Dans le même temps l'utilisation de l'ISA requiert le champ diffusé vers l'avant en **champ lointain**, ce qui nécessite également une distance suffisamment grande dans la direction de propagation. Il y a donc un compromis à trouver pour que le volume final soit compatible avec la mémoire vive disponible.

Pour tenir compte de ces contraintes, les dimensions choisies sont 8 mm dans la direction de propagation de l'onde incidente et 16 mm dans les directions transverses. Le centre du diffuseur est à 500 μm du plan d'émission et centré selon les directions transverses. Enfin, le récepteur est positionné à 7,5 mm du centre du diffuseur dans la direction d'incidence.

⁷ Ainsi le diffuseur étudié, s'il n'est pas parfaitement ellipsoïdal, est en revanche le même que dans les milieux modèles.

B

ONDES ÉLASTIQUES DANS LES SOLIDES

Cette partie reprend de façon condensée la propagation des ondes élastiques dans les solides. Il convient de consulter le livre référence en la matière [65] pour plus de détails.

B.1. Contraintes, déformations et tenseur élastique

Un solide soumis à des forces extérieures est le lieu de contraintes et déformations. Les contraintes sont décrites par le tenseur σ , d'ordre 2 (matrice 3×3). Les déformations sont décrites par le tenseur e , également d'ordre 2. Ce tenseur est lui-même relié au champ de déformation (u_1, u_2, u_3) dans le solide par la relation

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{B.1.1})$$

Sous l'hypothèse de petites déformations, il est possible d'effectuer un développement de Taylor des coefficients du tenseur des contraintes en fonction de ceux du tenseur des déformations. Ce qui donne :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + \sum_{(k,l)} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0} e_{kl} + \frac{1}{2} \sum_{(k,l)} \sum_{(m,n)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial e_{kl} \partial e_{mn}} \right)_{e_{kl}=e_{mn}=0} e_{kl} e_{mn} + \dots \quad (\text{B.1.2})$$

Le terme $\sigma_{ij}(0)$ étant nul (pas de contrainte sans déformation), ce développement s'écrit au premier ordre

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{(k,l)} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0} e_{kl} \\ &= \sum_{(k,l)} c_{ijkl} e_{kl} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

Il s'agit de **la loi de Hooke généralisée**. Elle considère une relation linéaire entre contraintes et déformations. Le coefficient de proportionnalité c_{ijkl} est un élément du tenseur élastique c , d'ordre 4 (contenant donc $3^4 = 81$ coefficients). Le tenseur élastique caractérise les propriétés élastiques d'un solide, tout comme la constante de raideur caractérise l'élasticité d'un ressort.

Dans les faits, les 81 coefficients du tenseur élastique ne sont pas tous indépendants. En effet, on peut montrer que les tenseurs des contraintes et des déformations sont symétriques¹, donc

1. C'est évident pour le tenseur des déformations d'après la formule B.1.1.

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $e_{kl} = e_{lk}$. En conséquence $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$. Cela réduit le tenseur des contraintes qui peut alors s'écrire en notation condensée sous forme d'une matrice 6×6 , dont les coefficients seront notés $c_{\alpha\beta}$. Mais là encore les 36 coefficients ne sont pas tous indépendants. Pour le comprendre il faut s'intéresser à l'énergie potentielle élastique du solide. L'écriture du principe fondamental de la dynamique appliquée au solide permet d'obtenir la variation infinitésimale de cette énergie, qui vaut

$$dV = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} de_{ij} \quad (\text{B.1.4})$$

D'après cette expression, chaque coefficient du tenseur des contraintes peut donc s'écrire

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial V}{\partial e_{ij}} \right) \quad (\text{B.1.5})$$

ce qui donne pour les coefficients du tenseur élastique

$$c_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \right) \quad (\text{B.1.6})$$

Le théorème de Schwarz donne finalement $c_{ijkl} = c_{klij}$, ou encore $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$. Autrement dit la matrice 6×6 est symétrique, et contient donc au maximum 21 coefficients indépendants. Cela permet de simplifier l'expression des coefficients du tenseur des contraintes, qui d'après la loi de Hooke généralisée s'écrivent

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + 2c_{16}e_{12} + 2c_{15}e_{13} + c_{12}e_{22} + 2c_{14}e_{23} + c_{13}e_{33} \\ \sigma_{12} &= c_{16}e_{11} + 2c_{66}e_{12} + 2c_{56}e_{13} + c_{26}e_{22} + 2c_{46}e_{23} + c_{36}e_{33} \\ \sigma_{13} &= c_{15}e_{11} + 2c_{56}e_{12} + 2c_{55}e_{13} + c_{25}e_{22} + 2c_{45}e_{23} + c_{35}e_{33} \\ \sigma_{22} &= c_{12}e_{11} + 2c_{26}e_{12} + 2c_{25}e_{13} + c_{22}e_{22} + 2c_{24}e_{23} + c_{23}e_{33} \\ \sigma_{23} &= c_{14}e_{11} + 2c_{46}e_{12} + 2c_{45}e_{13} + c_{24}e_{22} + 2c_{44}e_{23} + c_{34}e_{33} \\ \sigma_{33} &= c_{13}e_{11} + 2c_{36}e_{12} + 2c_{35}e_{13} + c_{23}e_{22} + 2c_{34}e_{23} + c_{33}e_{33} \end{aligned}$$

Pour les matériaux sans aucune symétrie (classe triclinique), les 21 coefficients sont effectivement indépendants. Néanmoins, lorsqu'il existe des symétries particulières dans la maille constitutive du matériau, le nombre de coefficients indépendants peut fortement diminuer. La référence [65] fournit un tableau des coefficients non nuls et leurs éventuels liens, selon la classe des matériaux. Ainsi, dans le cas le plus simple du solide isotrope, il y a seulement 2 coefficients indépendants : c_{11} et c_{12} ². Tous les autres sont nuls ou se déduisent de ces deux coefficients. Pour un solide possédant une direction privilégiée (solide isotrope transverse), appartenant à la classe hexagonale, il y a cette fois 5 coefficients indépendants.

B.2. Propagation d'une onde élastique

Intéressons-nous maintenant à une onde plane élastique se propageant dans le solide. Dans le cas le plus général du solide anisotrope, il est essentiel de préciser la direction de propagation. Nous la noterons $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, sachant que le repère $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$ est fixé par la classe du matériau. Par exemple, pour un matériau isotrope transverse la direction privilégiée est par convention selon le vecteur $\vec{\xi}_3$.

2. À noter que pour décrire un solide isotrope les coefficients de Lamé λ et μ sont souvent préférés aux coefficients élastiques c_{11} et c_{12} . Les deux paires de coefficients sont reliés par les relations $c_{11} = \lambda + 2\mu$ et $c_{12} = \lambda$.

L'équation fondamentale de l'élasto-dynamique s'écrit pour chaque composante u_i du champ de déplacement

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{B.2.1})$$

Avec la loi de Hooke généralisée, et en cherchant une solution sous la forme classique propagative $u_i^* F(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{v})$, la relation devient l'équation de Christoffel

$$\sum_{l=1}^3 (\Gamma_{il} - \rho_s v^2 \delta_{il}) u_l^* = 0 \quad (\text{B.2.2})$$

δ_{il} est le symbole de Kronecker, Γ le tenseur de Christoffel dont les coefficients valent

$$\Gamma_{il} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 c_{ijkl} n_j n_k \quad (\text{B.2.3})$$

La polarisation u_i^* se propage à la vitesse v et est un vecteur propre du tenseur de Christoffel associé à la valeur propre $\rho_s v^2$. Le tenseur de Christoffel est lui aussi symétrique, donc contient seulement 6 termes différents :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11} n_1^2 + 2c_{16} n_1 n_2 + 2c_{15} n_1 n_3 + c_{66} n_2^2 + 2c_{56} n_2 n_3 + c_{55} n_3^2 \\ \Gamma_{12} &= c_{16} n_1^2 + (c_{12} + c_{66}) n_1 n_2 + (c_{14} + c_{56}) n_1 n_3 + c_{26} n_2^2 + (c_{25} + c_{46}) n_2 n_3 + c_{45} n_3^2 \\ \Gamma_{13} &= c_{15} n_1^2 + (c_{14} + c_{56}) n_1 n_2 + (c_{13} + c_{55}) n_1 n_3 + c_{46} n_2^2 + (c_{45} + c_{36}) n_2 n_3 + c_{35} n_3^2 \\ \Gamma_{22} &= c_{66} n_1^2 + 2c_{26} n_1 n_2 + 2c_{46} n_1 n_3 + c_{22} n_2^2 + 2c_{24} n_2 n_3 + c_{44} n_3^2 \\ \Gamma_{23} &= c_{56} n_1^2 + (c_{25} + c_{46}) n_1 n_2 + (c_{45} + c_{36}) n_1 n_3 + c_{24} n_2^2 + (c_{23} + c_{44}) n_2 n_3 + c_{34} n_3^2 \\ \Gamma_{33} &= c_{55} n_1^2 + 2c_{45} n_1 n_2 + 2c_{35} n_1 n_3 + c_{44} n_2^2 + 2c_{34} n_2 n_3 + c_{33} n_3^2 \end{aligned}$$

La dernière étape pour obtenir les vitesses de propagation des ondes longitudinale et transverses dans le milieu consiste donc à trouver les valeurs propres de la matrice de Christoffel, ce qui se fait usuellement en résolvant

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} - \rho_s v^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho_s v^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho_s v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.2.4})$$

B.3. Cas d'un solide isotrope

Pour un solide isotrope, de nombreux coefficients élastiques s'annulent [65]. De plus, par définition, toutes les directions de propagation sont équivalentes. Prenons par exemple une propagation dans la direction $\vec{\xi}_1$: $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$. Cela n'enlève aucune généralité au résultat. Les coefficients du tenseur de Christoffel sont considérablement simplifiés, et le système B.2.4 devient

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \rho_s v^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho_s v^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} - \rho_s v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad c_{44} = \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \quad (\text{B.3.1})$$

Les solutions sont

$$v = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_s}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho_s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}} \quad (\text{B.3.2})$$

ce qui correspond aux expressions classiques des vitesses des ondes longitudinale et transverses dans un matériau isotrope. Au passage les 6 coefficients du tenseur des contraintes s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}(e_{22} + e_{33}) = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} \\
 \sigma_{12} &= 2c_{44}e_{12} = 2\mu e_{12} \\
 \sigma_{13} &= 2c_{44}e_{13} = 2\mu e_{13} \\
 \sigma_{22} &= c_{12}(e_{11} + e_{33}) + c_{11}e_{22} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22} \\
 \sigma_{23} &= 2c_{44}e_{23} = 2\mu e_{23} \\
 \sigma_{33} &= c_{12}(e_{11} + e_{22}) + c_{33}e_{33} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33}
 \end{aligned} \tag{B.3.3}$$

et montrent bien que seulement 2 coefficients indépendants caractérisent l'élasticité du solide.

B.4. Cas d'un solide isotrope transverse

Pour le solide isotrope transverse, la direction de propagation est cette fois-ci cruciale. La convention suppose la direction privilégiée selon le vecteur $\vec{\xi}_3$. La résolution pour une direction de propagation quelconque, cas le plus général, est particulièrement lourde à mener. Nous nous intéresserons ici simplement à deux cas particuliers : une propagation parallèle ou perpendiculaire à la direction privilégiée. Avant cela, indépendamment de la direction de propagation, voyons les 6 coefficients du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} \\
 \sigma_{12} &= 2c_{66}e_{12} \\
 \sigma_{13} &= 2c_{44}e_{13} \\
 \sigma_{22} &= c_{12}e_{11} + c_{11}e_{22} + c_{13}e_{33} \\
 \sigma_{23} &= 2c_{44}e_{23} \\
 \sigma_{33} &= c_{13}(e_{11} + e_{22}) + c_{33}e_{33}
 \end{aligned} \tag{B.4.1}$$

Attention cette fois-ci $c_{44}(=c_{55})$ est un coefficient indépendant de c_{11} et c_{12} . Seul c_{66} vaut toujours $(c_{11} - c_{12})/2$. Il y a donc bien 5 coefficients élastiques indépendants.

B.4.1. Propagation selon la direction principale

Nous considérons ici une propagation selon $\vec{\xi}_3$: $n_3 = 1$ et $n_1 = n_2 = 0$. L'équation B.2.4 devient

$$\begin{vmatrix} c_{44} - \rho_s v^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho_s v^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} - \rho_s v^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{B.4.2}$$

La vitesse de l'onde polarisée longitudinalement est donc

$$v = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho_s}} \tag{B.4.3}$$

et celle des ondes transverses

$$v = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho_s}} \tag{B.4.4}$$

B.4.2. Propagation perpendiculaire à la direction principale

Prenons maintenant une propagation selon $\vec{\xi}_1$, donc perpendiculaire à la direction privilégiée : $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$. L'équation B.2.4 s'écrit cette fois

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \rho_s v^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} - \rho_s v^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} - \rho_s v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.4.5})$$

La vitesse de l'onde polarisée longitudinalement est donc

$$v = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_s}} \quad (\text{B.4.6})$$

et celles des ondes transverses perpendiculaire (v_{\perp}) et parallèle ($v_{//}$) à la direction privilégiée

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho_s}} \quad \text{et} \quad v_{//} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho_s}} \quad (\text{B.4.7})$$

Les deux ondes transverses ont donc, du fait de l'anisotropie du milieu, des vitesses différentes. Cet exemple montre que pour un milieu isotrope transverse, si la résolution pour une direction de propagation quelconque est relativement complexe, elle est en revanche particulièrement simple à mettre en œuvre lorsque l'on s'intéresse aux propagations selon les axes du repère. C'est un point intéressant en vue de l'étude de l'os trabéculaire, qui sera considéré comme isotrope transverse structurellement.



DIFFUSION PAR UN CYLINDRE ELLIPTIQUE : ANNEXES DE CALCUL (§3.2.1)

C.1. Quelques développements

C.1.1. Composantes du vecteur déplacement dans le diffuseur

$$u_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{C.1.1})$$

$$u_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{C.1.2})$$

C.1.2. Coefficients du tenseur des contraintes dans le diffuseur

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \lambda k_L^2 \phi - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (\text{C.1.3})$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \mu \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{C.1.4})$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \lambda k_L^2 \phi + 2\mu \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{C.1.5})$$

où (λ, μ) sont les coefficients de Lamé du matériau du diffuseur. Par définition :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s}} \quad \text{et} \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}} \quad (\text{C.1.6})$$

et donc :

$$\lambda = \rho_s \omega^2 \left(\frac{1}{k_L^2} - \frac{2}{k_T^2} \right) \quad (\text{C.1.7})$$

$$\mu = \frac{\rho_s \omega^2}{k_T^2} \quad (\text{C.1.8})$$

Pour retrouver les équations (15), (16) et (17) de la référence [50] il faut également utiliser la définition des fonctions de Bessel, afin d'exprimer J_n'' en fonction de J_n' et J_n :

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \quad (\text{C.1.9})$$

C.1.3. Composantes de la normale à la frontière du diffuseur

$$n_r(\theta) = \frac{a(\theta)}{\sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da(\theta)}{d\theta}\right)^2}} \quad (\text{C.1.10})$$

$$n_\theta(\theta) = \frac{-\frac{da(\theta)}{d\theta}}{\sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da(\theta)}{d\theta}\right)^2}} \quad (\text{C.1.11})$$

C.2. Coefficients de la matrice A et du second membre B

C.2.1. Formalisme mathématique

Afin d'alléger l'écriture, nous définirons les fonctions suivantes : $x_0 = k_0 a(\theta)$, $x_L = k_L a(\theta)$ et $x_T = k_T a(\theta)$. La matrice carrée A, de taille $3(2N + 1)$, est composée de neuf sous-matrices carrées de taille $2N + 1$

$$A = \begin{pmatrix} A^{(s)} & A^{(L)} & A^{(T)} \\ B^{(s)} & B^{(L)} & B^{(T)} \\ C^{(s)} & C^{(L)} & C^{(T)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2.1})$$

dont les coefficients sont les suivants :

$$A^{(s)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho_s}{\rho_f} \left[x_0 H_n^{(1)'}(x_0) n_r + i n H_n^{(1)}(x_0) n_\theta \right] e^{-i(p-n)\theta} d\theta \quad (\text{C.2.2})$$

$$A^{(L)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [x_L J_n'(x_L) n_r + i n J_n(x_L) n_\theta] e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$A^{(T)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-n J_n(x_T) n_r - i x_T J_n'(x_T) n_\theta] e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$B^{(s)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_0^2 H_n^{(1)}(x_0) n_r e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$B^{(L)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(x_L^2 - 2n^2) J_n(x_L) + 2x_L J_n'(x_L)] n_r - i 2n [x_L J_n'(x_L) - J_n(x_L)] n_\theta e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$B^{(T)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [2n [x_T J_n'(x_T) - J_n(x_T)] n_r - i [(x_T^2 - 2n^2) J_n(x_T) + 2x_T J_n'(x_T)] n_\theta] e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$C^{(s)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i x_0^2 H_n^{(1)}(x_0) n_\theta e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$C^{(L)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [2n [x_L J_n'(x_L) - J_n(x_L)] n_r - i [(2x_L^2 - x_T^2 - 2n^2) J_n(x_L) + 2x_L J_n'(x_L)] n_\theta] e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

$$C^{(T)}(p, n) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(x_T^2 - 2n^2) J_n(x_T) + 2x_T J_n'(x_T)] n_r - i 2n [x_T J_n'(x_T) - J_n(x_T)] n_\theta e^{-i(p-n)\theta} d\theta$$

En suivant la même décomposition modale, comme c'est le cas dans la référence [50], le vecteur second membre s'écrit lui

$$B = \begin{pmatrix} a_{inc} \\ b_{inc} \\ c_{inc} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2.3})$$

avec

$$\begin{aligned} a_{inc}(p) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\rho_s}{\rho_f} [x_0 J'_n(x_0) n_r + i n J_n(x_0) n_\theta] e^{-i(p-n)\theta} d\theta \\ b_{inc}(p) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -x_T^2 J_n(x_0) n_r e^{-i(p-n)\theta} d\theta \\ c_{inc}(p) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -i x_T^2 J_n(x_0) n_\theta e^{-i(p-n)\theta} d\theta \end{aligned} \quad (C.2.4)$$

Bien sûr dans le cas d'une résolution numérique, la somme infinie doit être tronquée à un ordre fini. L'ordre N utilisé pour la matrice A est un candidat naturel, mais il peut *a priori* être tout autre.

En réalité, cette décomposition modale n'est pas nécessaire pour l'onde incidente, dont on connaît une expression simple : $p_{inc} = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i k_0 r \cos(\theta - \theta_{inc})} e^{-i \omega t}$. Les coefficients du second membre peuvent donc s'écrire directement :

$$\begin{aligned} a_{inc}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -i \frac{\rho_s}{\rho_f} x_0 [\cos(\theta - \theta_{inc}) n_r - \sin(\theta - \theta_{inc}) n_\theta] e^{i x_0 \cos(\theta - \theta_{inc})} e^{-i p \theta} d\theta \\ b_{inc}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -x_T^2 e^{i x_0 \cos(\theta - \theta_{inc})} n_r e^{-i p \theta} d\theta \\ c_{inc}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -i x_T^2 e^{i x_0 \cos(\theta - \theta_{inc})} n_\theta e^{-i p \theta} d\theta \end{aligned} \quad (C.2.5)$$

Utiliser ce second membre permet d'éviter une troncature des séries, source non nécessaire d'approximation. D'autre part, il n'y a plus qu'une seule intégrale à calculer par valeur de p , ce qui permet également de diminuer le temps de calcul.

C.2.2. Mise en place numérique

La résolution numérique du système $Ax = B$ est particulièrement instable. Aussi quelques astuces peuvent être utiles pour améliorer la situation.

Dérivées des fonctions de Bessel et Hankel

Bon nombre de coefficients font apparaître la dérivée des fonctions de Bessel ou Hankel. Plutôt que d'utiliser un algorithme numérique de dérivation, il vaut mieux privilégier les relations qui existent entre les fonctions et leur dérivée :

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \\ Y'_n(x) &= Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x) \\ \text{et donc } H_n^{(1)'}(x) &= H_{n-1}^{(1)}(x) - \frac{n}{x} H_n^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (C.2.6)$$

Calcul des intégrales - Exploitation des symétries

Dans le cadre du chapitre 3, nous nous restreignons au cas d'un angle incidence nulle. Les résultats ne sont donc pas aussi généraux que si cet angle était quelconque. Néanmoins, les conclusions qualitatives devraient être sensiblement les mêmes.

L'utilisation d'un angle d'incidence nul a malgré tout un grand intérêt : le problème est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. En conséquence, les fonctions $a(\theta)$ et $n_r(\theta)$ sont paires,

tandis que $n_\theta(\theta)$ est impaire. Ainsi les intégrales qui interviennent dans les coefficients de la matrice A peuvent être avantageusement simplifiées. Ceci est particulièrement important car le calcul de ces intégrales est le point délicat du problème. Les calculer de façon précise est en effet compliqué car elles sont composées de fonctions à variations très rapides, avec une grande dynamique de valeurs.

De façon plus générale, quelques pré-traitements sont appliqués pour faciliter le calcul de ces intégrales. Les intégrales de sommes sont séparées autant que possible en sommes d'intégrales pour faciliter la convergence de leurs calculs. Ensuite chaque fonction intégrande est normalisée pour éviter que l'intégrale à calculer prenne des valeurs trop élevées.



PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

D.1. Publications dans des journaux internationaux à comité de lecture

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Measurements of ultrasound velocities and attenuations in numerical anisotropic porous media compared to Biot's and multiple scattering models. », *Ultrasonics* **54**, 1146-54 (2014)

F. Mézière, M. Muller, B. Dobigny, E. Bossy, A. Derode, « Simulations of ultrasound propagation in random arrangements of elliptic scatterers : Occurrence of two longitudinal waves. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **133**, 643-652 (2013)

D.2. Conférences internationales en tant qu'orateur

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Velocities, attenuations and insights on propagation paths for the fast and slow waves in numerical anisotropic porous media. », *IEEE International Ultrasonics Symposium*, Prague (2013)

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Velocities, attenuations and insights on propagation paths for the fast and slow waves in numerical anisotropic porous media. », *5th European Symposium on Ultrasonic Characterization of Bone (ESUCB)*, Granada (2013)

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « 2D and 3D numerical experiments in anisotropic porous media : more insight on the propagation of the two compressional waves in cancellous bone. », *IEEE International Ultrasonics Symposium*, Dresden (2012)

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Modeling ultrasound interaction with cancellous bone : investigation on the nature of two compressional waves. », *Acoustics 2012 (11ème Congrès Français d'Acoustique jumelé au 2012 Annual IOA Meeting)*, Nantes (2012)

D.3. Conférences internationales en tant que co-auteur

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Modeling ultrasound interaction with cancellous bone : investigation on the nature of two compressional waves. », *163th Meeting of the Acoustical Society of America*, Hong Kong (2012)

D.4. Conférences nationales en tant qu'orateur

F. Mézière, M. Muller, E. Bossy, A. Derode, « Étude de la propagation des ondes ultrasonores dans l'os trabéculaire à l'aide d'échantillons synthétiques : mises en œuvre numérique et expérimentale. », 12ème Congrès Français d'Acoustique, Nantes (2014)

BIBLIOGRAPHIE

- ¹C. F. NJEH et al., « The role of ultrasound in the assessment of osteoporosis : a review. », *Osteoporosis international : a journal established as result of cooperation between the European Foundation for Osteoporosis and the National Osteoporosis Foundation of the USA* **7**, 7–22 (1997) (cf. p. 7).
- ²M. B. TAVAKOLI et J. a. EVANS, « The effect of bone structure on ultrasonic attenuation and velocity. », *Ultrasonics* **30**, 389–95 (1992) (cf. p. 8, 15).
- ³O. STRÖM et al., « Osteoporosis : burden, health care provision and opportunities in the EU : a report prepared in collaboration with the International Osteoporosis Foundation (IOF) and the European Federation of Pharmaceutical Industry Associations (EFPIA). », *Archives of osteoporosis* **6**, 59–155 (2011) (cf. p. 8).
- ⁴R. LAKES et al., « Slow compressional wave propagation in wet human and bovine cortical bone », *Science*, 513–515 (1983) (cf. p. 11, 17, 26).
- ⁵A. B. WOOD, *A Textbook of Sound*, Bell (1930) (cf. p. 14).
- ⁶L. FOREST et al., « Biot's theory of acoustic propagation in porous media applied to aerogels and alcogels », *Journal of non-crystalline solids* **225**, 287–292 (1998) (cf. p. 14).
- ⁷A. HOSOKAWA et T. OTANI, « Acoustic anisotropy in bovine cancellous bone. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **103**, 2718–22 (1998) (cf. p. 16, 21, 74).
- ⁸M. PAKULA et al., « Influence of the filling fluid on frequency-dependent velocity and attenuation in cancellous bones between 0.35 and 2.5 MHz. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **126**, 3301–10 (2009) (cf. p. 16, 27).
- ⁹A. HOSOKAWA et T. OTANI, « Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 558–62 (1997) (cf. p. 16 sq.).
- ¹⁰M. A. BIOT, « Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range », *The Journal of the Acoustical Society of America* **28**, 168 (1956) (cf. p. 17 sq., 20, 25, 81).
- ¹¹M. A. BIOT, « Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range », *The Journal of the Acoustical Society of America* **28**, 179 (1956) (cf. p. 17, 25).
- ¹²T. J. PLONA, « Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies », *Applied Physics Letters* **36**, 259 (1980) (cf. p. 17).
- ¹³M. A. BIOT, « Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid », *Journal of Applied Physics* **26**, 182 (1955) (cf. p. 17 sq.).
- ¹⁴J. M. CARCIONE, *Wave fields in real media : wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media*, sous la dir. de K. HELBIG et S. TREITEL (Pergamon, 2001) (cf. p. 17).
- ¹⁵D. L. JOHNSON et T. J. PLONA, « Acoustic slow waves and the consolidation transition », *The Journal of the Acoustical Society of America* **72**, 556–565 (1982) (cf. p. 20, 22–24, 76).
- ¹⁶E. R. HUGHES et al., « Ultrasonic propagation in cancellous bone : A new stratified model », *Ultrasound in Medicine & Biology* **25**, 811–821 (1999) (cf. p. 20, 25–27, 69, 85, 93, 98).

- ¹⁷M. A. BIOT et D. G. WILLIS, « The elastic coefficients of the theory of consolidation », *Journal of Applied Mechanics* **24**, 594–601 (1957) (cf. p. 21).
- ¹⁸C. GOMMES et al., « Practical methods for measuring the tortuosity of porous materials from binary or gray-tone tomographic reconstructions », *AIChE* **55**, 2000–2012 (2009) (cf. p. 22, 87).
- ¹⁹M. MATYKA et Z. KOZA, « How to Calculate Tortuosity Easily? », *arXiv* (2012) **10 . 1063 / 1 . 4711147** (cf. p. 22).
- ²⁰D. L. JOHNSON et al., « Tortuosity and Acoustic Slow Waves », *Physical Review Letters* **49**, 1840–1844 (1982) (cf. p. 23, 25).
- ²¹D. L. JOHNSON et al., « Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media », *Journal of fluid mechanics* **176**, 379–402 (1987) (cf. p. 23, 25, 90).
- ²²M. SCHOENBERG, « Wave propagation in alternating solid and fluid layers », *Wave motion* **6**, 303–320 (1984) (cf. p. 25).
- ²³M. L. MCKELVIE et S. B. PALMER, « The interaction of ultrasound with cancellous bone. », *Physics in medicine and biology* **36**, 1331–40 (1991) (cf. p. 26 sq.).
- ²⁴S. C. COWIN et L. CARDOSO, « Fabric dependence of bone ultrasound. », *Acta of bioengineering and biomechanics / Wrocław University of Technology* **12**, 3–23 (2010) (cf. p. 27).
- ²⁵Z. E. A. FELLAH et al., « Application of the biot model to ultrasound in bone : direct problem. », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **55**, 1508–15 (2008) (cf. p. 27).
- ²⁶N. SEBAA et al., « Application of the Biot model to ultrasound in bone : inverse problem. », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **55**, 1516–23 (2008) (cf. p. 27).
- ²⁷P. LAUGIER et G. HAÏAT, *Bone quantitative ultrasound*, sous la dir. de P. LAUGIER et G. HAÏAT, Springer (2011) (cf. p. 27, 70).
- ²⁸C. M. LANGTON et al., « The Measurement of Broadband Ultrasonic Attenuation in Cancellous Bone », *Engineering in Medecine* (1984) (cf. p. 27).
- ²⁹J. ALVES et al., « Influence of marrow on ultrasonic velocity and attenuation in bovine trabecular bone », *Calcified tissue international*, 362–367 (1996) (cf. p. 27).
- ³⁰K. A. WEAR, « Ultrasonic scattering from cancellous bone : a review. », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **55**, 1432–41 (2008) (cf. p. 29).
- ³¹S. RYTOV et al., *Principles of Statistical Radiophysics 4 : Wave Propagation Through Random Media*, Springer V (1989) (cf. p. 29, 43).
- ³²A. DERODE et al., « Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium », *Physical Review E* **74**, 036606 (2006) (cf. p. 35, 43).
- ³³A. DERODE et al., « Dynamic coherent backscattering in a heterogeneous absorbing medium : Application to human trabecular bone characterization », *Applied Physics Letters* **87**, 114101 (2005) (cf. p. 39, 69, 114).
- ³⁴E. AKKERMANS et G. MONTAMBAUX, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*, Cambridge (2007) (cf. p. 43).
- ³⁵L. FOLDY, « The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers », *Physical Review* **67**, 107–119 (1945) (cf. p. 44).
- ³⁶M. COWAN et al., « Ultrasonic wave transport in a system of disordered resonant scatterers : Propagating resonant modes and hybridization gaps », *Physical Review B* **84**, 1–9 (2011) (cf. p. 45, 85).

- ³⁷D. DiPERNA et T. STANTON, « Sound scattering by cylinders of noncircular cross section : A conformal mapping approach », *The Journal of the Acoustical Society of America* **96**, 3064–3079 (1994) (cf. p. 47, 49, 58, 66).
- ³⁸A. LAKHTAKIA et al., « Iterative extended boundary condition method for scattering by objects of high aspect ratios », *The Journal of the Acoustical Society of America* **76**, 906–912 (1984) (cf. p. 47, 50, 66).
- ³⁹G. CHARDON, « On the numerical stability of the least-squares method for the planar scattering by obstacles », arXiv (2014) (cf. p. 47, 64, 66).
- ⁴⁰J. FARAN, « Sound scattering by solid cylinders and spheres », *The Journal of the Acoustical Society of America* **23**, 405–418 (1951) (cf. p. 48, 64).
- ⁴¹J.-G. MINONZIO, « Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore », thèse de doct. (2006) (cf. p. 48, 64).
- ⁴²R. BARAKAT, « Diffraction of plane waves by an elliptic cylinder », *The Journal of the Acoustical Society of America* **35**, 1990–1996 (1963) (cf. p. 49, 65).
- ⁴³J. BURKE, « Low-Frequency Approximations for Scattering by Penetrable Elliptic Cylinders », *The Journal of the Acoustical Society of America* **36**, 2059–2070 (1964) (cf. p. 49, 65).
- ⁴⁴V. V. VARADAN, « Scattering matrix for elastic waves. II. Application to elliptic cylinders », *The Journal of the Acoustical Society of America* **63**, 1014–1024 (1978) (cf. p. 49, 65).
- ⁴⁵M. M. SIMON et R. P. RADLINSKI, « Elastic wave scattering from elliptical shells », *The Journal of the Acoustical Society of America* **71**, 273–281 (1982) (cf. p. 49, 65).
- ⁴⁶G. LIU et al., « Conformal mapping for the Helmholtz equation : acoustic wave scattering by a two dimensional inclusion with irregular shape in an ideal fluid. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **131**, 1055–65 (2012) (cf. p. 49, 58).
- ⁴⁷P. A. MARTIN, « Two-dimensional acoustic scattering, conformal mapping, and the Rayleigh hypothesis. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **132**, 2184–8 (2012) (cf. p. 49, 58).
- ⁴⁸P. WATERMAN, « New Formulation of Acoustic Scattering », *The Journal of the Acoustical Society of America* **45**, 1417–1429 (1969) (cf. p. 50).
- ⁴⁹T. A. K. PILLAI et al., « Sound scattering by rigid and elastic infinite elliptical cylinders in water », *The Journal of the Acoustical Society of America* **72** (1982) (cf. p. 50, 52).
- ⁵⁰F. LÉON et al., « Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section », *The Journal of the Acoustical Society of America* **116**, 686 (2004) (cf. p. 50 sq., 133 sq.).
- ⁵¹S. ANCEY et al., « Acoustic scattering by elastic cylinders of elliptical cross-section and splitting up of resonances », *Journal of Applied Physics* **115**, 194904 (2014) (cf. p. 50).
- ⁵²P. WATERMAN, « Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering », *Physical review D* **19**, 101–104 (1971) (cf. p. 50).
- ⁵³F. MÉZIÈRE et al., « Simulations of ultrasound propagation in random arrangements of elliptic scatterers : Occurrence of two longitudinal waves », *The Journal of the Acoustical Society of America* **133**, 643–652 (2013) (cf. p. 69).
- ⁵⁴F. MÉZIÈRE et al., « Measurements of ultrasound velocity and attenuation in numerical anisotropic porous media compared to Biot's and multiple scattering models. », *Ultrasonics* **54**, 1146–54 (2014) (cf. p. 69, 123).
- ⁵⁵A. HOSOKAWA, « Simulation of ultrasound propagation through bovine cancellous bone using elastic and Biot's finite-difference time-domain methods », *The Journal of the Acoustical Society of America* **118**, 1782 (2005) (cf. p. 70).

- ⁵⁶P. H. NICHOLSON et al., « Do quantitative ultrasound measurements reflect structure independently of density in human vertebral cancellous bone ? », *Bone* **23**, 425–31 (1998) (cf. p. 72).
- ⁵⁷J. HOSHEN et R. KOPELMAN, « Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm », *Physical Review B* **14**, 3438–3445 (1976) (cf. p. 77).
- ⁵⁸P. N. J. RASOLOFOSAON, « Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media », *Applied Physics Letters* **52**, 780 (1988) (cf. p. 84).
- ⁵⁹P. LE BAS, « Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées. Propagation d'ondes cohérentes et interactions résonantes. », thèse de doct. (2004) (cf. p. 86).
- ⁶⁰K. A. WEAR, « Group velocity, phase velocity, and dispersion in human calcaneus in vivo », *The Journal of the Acoustical Society of America* **121**, 2431 (2007) (cf. p. 88, 94).
- ⁶¹S. CHAFFAÏ et al., « In vitro measurement of the frequency-dependent attenuation in cancellous bone between 0.2 and 2 MHz. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **108**, 1281–9 (2000) (cf. p. 88).
- ⁶²K. A. WEAR, « Ultrasonic Attenuation in Human Calcaneus from 0 . 2 to 1 . 7 MHz », *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **48**, 602–608 (2001) (cf. p. 88).
- ⁶³K. A. WEAR, « Anisotropy of ultrasonic backscatter and attenuation from human calcaneus : implications for relative roles of absorption and scattering in determining attenuation », *The Journal of the Acoustical Society of America* **107**, 3474–3479 (2000) (cf. p. 90).
- ⁶⁴C. C. ANDERSON et al., « Interference between wave modes may contribute to the apparent negative dispersion observed in cancellous bone. », *The Journal of the Acoustical Society of America* **124**, 1781–9 (2008) (cf. p. 90, 94).
- ⁶⁵D. ROYER et E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides, Tome 1 : Propagation libre et guidée*, sous la dir. de SPRINGER (1996) (cf. p. 92, 112, 127–129).
- ⁶⁶W. L. ROQUE et al., « Tortuosity and Elasticity Study of Distal Radius Trabecular Bone », (cf. p. 94).
- ⁶⁷J. TURNER, « Elastic wave propagation and scattering in heterogeneous, anisotropic media : Textured polycrystalline materials », *Journal of the Acoustical Society of America* **106**, 541–552 (1999) (cf. p. 94).
- ⁶⁸A. CLARKE et al., « A phantom for quantitative ultrasound of trabecular bone », *Physics in Medicine and Biology* **39**, 1677–1687 (1994) (cf. p. 97).
- ⁶⁹C. M. LANGTON et al., « Development of a cancellous bone structural model by stereolithography for ultrasound characterisation of the calcaneus », *Medical Engineering and Physics* **19**, 599–604 (1997) (cf. p. 97, 104).
- ⁷⁰K. ATTENBOROUGH et al., « Measurements of tortuosity in stereolithographical bone replicas using audiofrequency pulses », *The Journal of the Acoustical Society of America* **118**, 2779 (2005) (cf. p. 97, 104 sq.).
- ⁷¹K. A. WEAR, « Mechanisms for attenuation in cancellous-bone-mimicking phantoms. », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **55**, 2418–25 (2008) (cf. p. 97).
- ⁷²A. WYDRA et R. G. MAEV, « A novel composite material specifically developed for ultrasound bone phantoms : cortical, trabecular and skull. », *Physics in medicine and biology* **58**, N303–N319 (2013) (cf. p. 97).
- ⁷³K. I. LEE, « Dependences of quantitative ultrasound parameters on frequency and porosity in water-saturated nickel foams », *The Journal of the Acoustical Society of America* **135**, EL61–EL67 (2014) (cf. p. 97).

- ⁷⁴R. HODGSKINSON et al., « The non-linear relationship between BUA and porosity in cancellous bone. », *Physics in medicine and biology* **41**, 2411–2420 (1996) (cf. p. 104 sq.).
- ⁷⁵K. R. MARUTYAN et al., « Bayesian estimation of the underlying bone properties from mixed fast and slow mode ultrasonic signals », *The Journal of the Acoustical Society of America* **121**, EL8 (2007) (cf. p. 118).
- ⁷⁶E. BOSSY et al., « Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models », *The Journal of the Acoustical Society of America* **115**, 2314–2324 (2004) (cf. p. 119).

Résumé

Comprendre la propagation ultrasonore dans une structure poreuse, hétérogène et anisotrope telle que l'os trabéculaire est un vrai défi théorique. La théorie de Biot permet d'expliquer la présence et la vitesse des deux ondes longitudinales observées expérimentalement sous certaines conditions. En revanche, ne rendant pas compte des phénomènes de diffusion multiple, elle échoue à en prédire l'atténuation. Les théories de diffusion multiple sont une alternative, mais sont difficilement applicables à une structure si complexe. Des simulations numériques ont donc été menées dans des milieux constitués d'ellipsoïdes solides distribués aléatoirement dans un fluide, semblables à l'os trabéculaire, mais simplifiés et contrôlés. Cela a permis de mieux comprendre l'influence de quelques paramètres (porosité, anisotropie, ...) sur l'apparition des deux ondes. Nos résultats suggèrent que l'onde rapide serait guidée par les travées osseuses, tandis que l'onde lente se propagerait essentiellement dans le fluide. Par ailleurs, la théorie de Biot a pu être appliquée pour la première fois sans aucun ajustement de paramètre. Nous avons au passage montré que le calcul semi-analytique du champ diffusé par des cylindres elliptiques de grand rapport d'aspect était très instable numériquement, mais que ce problème pouvait être atténué en effectuant les calculs en précision arbitraire. Expérimentalement enfin, grâce à l'impression 3D, nous avons pu répliquer un échantillon d'os trabéculaire de cheval à l'échelle. En augmentant artificiellement l'anisotropie avant l'impression, pour la première fois avec un échantillon synthétique d'os trabéculaire, nous avons observé deux ondes longitudinales.

Mots clés : ultrasons en milieux complexes, os trabéculaire, ondes rapide et lente, milieux poreux anisotropes, impression 3D, diffusion multiple, diffusion par un cylindre, simulations numériques

Abstract

Understanding ultrasound propagation through a porous, heterogeneous and anisotropic structure as trabecular bone is a real theoretical challenge. Biot's theory can predict the propagation and velocities of the two longitudinal waves observed experimentally under some conditions. However, this theory fails to predict the observed attenuation as it does not take into account the multiple scattering occurring in cancellous bone. Multiple scattering theories could provide an alternative, but are hardly suitable to such a complex structure. We thus ran numerical simulations in simplified and controlled bone-like structures consisting of solid ellipsoids randomly distributed in a fluid. These simulations highlighted the role of some key parameters (porosity, anisotropy, ...) in the apparition of the two waves. Our results suggest that the fast wave would be guided by the trabeculae, while the slow one essentially propagates through the fluid phase. Furthermore, Biot's theory was applied for the first time in bone-like structures without fitted parameters. In the context of these simulations, we showed that the semi-analytic processing of the field scattered by high aspect ratio elliptical cylinders is very instable but can be improved by performing arbitrary precision calculations. Finally, with the use of 3D printing, we have replicated at scale 1 :1 a sample of horse cancellous bone, opening the way to trabecular bone phantoms controlled numerically. Thus, by increasing the anisotropy prior to printing, we experimentally observed for the first time the propagation of two longitudinal waves in bone-like samples.

Keywords : ultrasound in complex media, trabecular bone, cancellous bone, fast and slow wave, anisotropic porous media, 3D printing, multiple scattering, scattering by a cylinder, numerical simulations